

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 239-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__239_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2154.

(1910, p. 210.)

On donne un cercle C de centre O et de rayon R et un point fixe A , tel que $OA = \frac{R}{\sqrt{2}}$. On considère toutes les ellipses qui ont le cercle C pour cercle orthoptique et qui passent par A .

Montrer que :

- 1° Ces ellipses enveloppent une ellipse ;
- 2° Le lieu de leurs sommets se compose de deux cercles ;
- 3° Le lieu de leurs foyers se compose de deux lemniscates de Bernoulli.

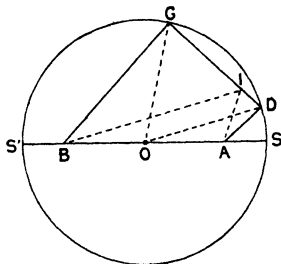
E.-N. BARISIEN.

SOLUTION,

Par M. L. KLUG.

1° Soient B le symétrique de A par rapport à O , S et S' les points de rencontre de AB avec le cercle donné. Soit encore AD la tangente en A à l'une des ellipses variables considérées (E). Cette ellipse passe en B et sa tangente en ce point est BG parallèle à AD . En outre, si AD et BG rencontrent respectivement en D et G le cercle donné, DG est perpendiculaire à AD et BG . DG est donc tangente à l'ellipse (E),

puisque le cercle donné est son cercle orthoptique. Si I est le point de contact, OG doit passer par le milieu de BI. OG est



donc parallèle à AI; de même OD est parallèle à BI. On voit donc que l'ellipse (E) touche au point I, l'ellipse fixe ayant pour foyers A et B et pour grand axe SS'. C'est l'enveloppe cherchée.

2° Soit x la longueur du demi-diamètre de (E), conjugué de AB. On a, par le théorème d'Apollonius,

$$\begin{aligned} x^2 + \overline{OA}^2 &= \text{somme des carrés des demi-axes de (E)} \\ &= R^2 = 2\overline{OA}^2, \end{aligned}$$

d'où

$$x = OA.$$

Ainsi AB est un des deux diamètres conjugués égaux de (E). Soient alors M un des sommets de cette ellipse, φ l'angle que fait OM avec OA. Si ON est un demi-axe perpendiculaire à OM, on doit avoir

$$\begin{aligned} \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 &= R^2, \\ \frac{OM}{ON} &= \pm \tan \varphi, \end{aligned}$$

d'où

$$OM = \pm R \cos \varphi, \quad ON = \pm R \sin \varphi.$$

Les points M et N décrivent donc les deux cercles ayant pour diamètres OS et OS'.

3° Soit F un foyer de (E), supposons-le porté par l'axe OM. On a

$$\overline{OF}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{ON}^2 = R^2 \cos 2\varphi;$$

ce qui montre que le point F décrit une lemniscate de Bernoulli, de foyers A et A'.

Autres solutions par MM. ABRAMESCU, R. BOUVAIST et H. LEZ.