

E.-N. BARISIEN

Sur quelques séries

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 200-205

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__200_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

{D2 b α}

SUR QUELQUES SÉRIES;

PAR M. E.-N. BARISIEN.

Le but de cette Note est de déduire des séries remarquables comme conséquences des développements en séries de $\sin x$ et $\cos x$

$$(1) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots,$$

$$(2) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

1. Ces séries deviennent pour $x = \frac{\pi}{2}$

$$(3) \quad 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \dots,$$

$$(4) \quad 1 = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} - \dots$$

En égalant les séries (3) et (4), on a, en divisant par $\frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{1.2.3.4.5} - \dots \\ = \frac{\frac{\pi}{2}}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5.6} - \dots \end{aligned}$$

D'où

$$(5) \quad 1 = \frac{\frac{\pi}{2}}{1.2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{1.2.3} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{1.2.3.4} \\ - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \dots$$

2. En faisant $x = \pi$, (1) et (2) deviennent

$$(6) \quad 1 = \frac{\pi^2}{1.2.3} - \frac{\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \dots,$$

$$(7) \quad 2 = \frac{\pi^2}{1.2} - \frac{\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6} - \dots$$

En ajoutant (6) et (7), on a

$$(8) \quad 3 = \frac{4\pi^2}{1.2.3} - \frac{6\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{8\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \dots$$

En ajoutant (8) et (6), on a encore

$$(9) \quad 4 = \frac{5\pi^2}{1.2.3} - \frac{7\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{9\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \dots$$

En général, on a, pour un nombre entier quelconque λ ,

$$(10) \quad \lambda = \frac{(\lambda+1)\pi^2}{1.2.3} - \frac{(\lambda+3)\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(\lambda+5)\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \dots$$

3. En retranchant (6) et (7), on a

$$(11) \quad 1 = \frac{\pi^2}{1.3} - \frac{\pi^4}{1.2.3.5} \\ + \frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.7} - \frac{\pi^8}{1.2.3.4.5.6.7.9} + \dots$$

4. Multiplions (6) par (2), il vient

$$(12) \quad 2 = \frac{\pi^2}{1.3} - \frac{\pi^4}{1.3.4.5} + \frac{\pi^6}{1.3.4.5.6.7} - \dots$$

En retranchant (7) et (12), on obtient

$$(13) \quad 0 = \frac{\pi^2}{1.2.3} - \frac{3\pi^4}{1.2.3.4.5} \\ + \frac{5\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \frac{7\pi^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} + \dots$$

On en déduit aussi

$$(14) \quad 1 = \frac{3\pi^2}{4.5} - \frac{5\pi^4}{4.5.6.7} + \frac{7\pi^6}{4.5.6.7.8.9} - \dots$$

ou

$$(15) \quad 20 = 3\pi^2 - \frac{5\pi^4}{6.7} + \frac{7\pi^6}{6.7.8.9} - \dots$$

En ajoutant (7) et (12), on a encore

$$(16) \quad 4 = \frac{5\pi^2}{1.2.3} - \frac{7\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{9\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \dots$$

5. En faisant $x = 2\pi$ dans (1), on a

$$(17) \quad 1 = \frac{(2\pi)^2}{1.2.3} - \frac{(2\pi)^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(2\pi)^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \dots$$

De même, pour $x = 2\lambda\pi$, λ étant un nombre entier, on a

$$(18) \quad 1 = \frac{(2\lambda\pi)^2}{1.2.3} - \frac{(2\lambda\pi)^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(2\lambda\pi)^6}{1.2.3.4.5.6.7} - \dots$$

La valeur $\lambda = 2\pi$ dans (2) donne

$$(19) \quad 1 = \frac{(2\pi)^2}{3.4} - \frac{(2\pi)^4}{3.4.5.6} + \frac{(2\pi)^6}{3.4.5.6.7.8} - \dots$$

On a aussi pour $x = 2\lambda\pi$ (λ entier)

$$(20) \quad 1 = \frac{(2\lambda\pi)^2}{3.4} - \frac{(2\lambda\pi)^4}{3.4.5.6} + \frac{(2\lambda\pi)^6}{3.4.5.6.7.8} - \dots$$

6. En faisant $x = 45^\circ$ dans (1) et (2), on a

$$(21) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \dots,$$

$$(22) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{1.2.3.4} - \dots$$

En ajoutant ces deux dernières séries, on a l'expression de $\sqrt{2}$ en fonction de π

$$(23) \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

7. Faisons $x = 30^\circ$ dans (1) et (2), il en résulte

$$(24) \quad \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \dots,$$

$$(25) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{1.2.3.4} - \dots$$

8. La valeur $x = 60^\circ$ donne pour (1) et (2)

$$(26) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \dots,$$

$$(27) \quad \frac{1}{2} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^4}{1.2.3.4} - \dots$$

9. En ajoutant (25) et (26), on a l'expression de $\sqrt{3}$ en fonction de π

$$(28) \quad \sqrt{3} = 1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{1.2.3} \\ + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

10. L'égalité de (24) et (27) donne

$$(29) \quad 1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{1.2.3} \\ - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} - \dots$$

11. L'égalité de (25) et (26) donne de même

$$(30) \quad 1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{1.2.3} \\ - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} - \dots$$

12. Pour $x = 18^\circ$, $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Donc (1) devient

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\pi}{20} - \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

Il en résulte le développement de $\sqrt[5]{5}$ en fonction de π

$$(31) \quad \sqrt[5]{5} = 1 + 4 \left[\frac{\pi}{20} - \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^3}{1.2.3} + \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\left(\frac{\pi}{20}\right)^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots \right].$$

13. On peut, par des combinaisons d'addition ou soustraction de ces diverses séries, en obtenir une infinité d'autres.

Par exemple, l'addition de (23) et (28) donnera la curieuse série suivante du développement de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ en fonction de π :

$$(32) \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} = 2 + \frac{7\pi}{12} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1.2} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{1.2.3} \\ + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{1.2.3.4} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^5}{1.2.3.4.5} \\ - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^7}{1.2.3.4.5.6.7} \\ + \dots$$

Et l'on sait que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est une valeur approchée de π .