

Certificats de géométrie supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 179-182

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__179_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Lille.

*On considère, en chaque point M d'une ligne (L) tracée
sur une surface donnée, la sphère σ qui touche la surface*

et qui contient le cercle osculateur de (L); on désigne par σ_1, σ_2 les deux sphères σ relatives aux deux lignes de courbure du point M, par $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ les courbures principales correspondantes, par φ l'angle que fait la tangente à (L) avec la première ligne de courbure; on représente enfin par les mêmes lettres accentuées les mêmes éléments relatifs au point M' de (L), infiniment voisin de M.

1° Démontrer les formules suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} MM' \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \cos \varphi = (\widehat{\sigma_2, \sigma'_2}), \\ MM' \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin \varphi = (\widehat{\sigma_1, \sigma'_1}), \\ MM' \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{(\widehat{\sigma_1, \sigma'_1})(\widehat{\sigma_2, \sigma'_2})}{(\widehat{\sigma, \sigma'})}, \\ \frac{1}{(\widehat{\sigma, \sigma'})^2} = \frac{1}{(\widehat{\sigma_1, \sigma'_1})^2} + \frac{1}{(\widehat{\sigma_2, \sigma'_2})^2}, \end{array} \right.$$

et tirer de ces formules les conséquences qu'elles comportent, au point de vue de la transformation par inversion.

2° Σ étant la sphère osculatrice de (L) au point M, θ l'angle sous lequel cette sphère coupe la surface, démontrer qu'on a

$$(2) \quad (\widehat{\Sigma \Sigma'}) \pm (\widehat{\sigma, \sigma'}) \pm d\theta = 0.$$

Conséquences de la relation (2).

N. B. — Le symbole $(\widehat{S, T})$ représente l'angle sous lequel se coupent les deux surfaces S et T.

(Juillet 1910.)

1° QUESTION DE COURS. — Détermination des lignes de courbure et des courbures principales d'une surface quelconque, en coordonnées curvilignes.

2° APPLICATION. — Calculer la courbure totale $\frac{1}{R_1 R_2}$ et la courbure moyenne $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ de l'hélicoïde :

$$x = u \cos(U + v),$$

$$y = u \sin(U + v),$$

$$z = kv,$$

k étant une constante, U une fonction de u ; montrer que l'on peut, par des quadratures, déterminer cette fonction U de telle sorte qu'il existe une relation linéaire constante entre la courbure totale et la courbure moyenne.

(Novembre 1910.)

Rennes.

COMPOSITION ÉCRITE. — 1° Sur deux surfaces S et S_1 non développables on fait correspondre les points M et M_1 où les plans tangents sont parallèles. Soient une courbe C située sur S et passant par M , MT la tangente en M à C , $M\theta$ la direction conjuguée; soient C_1 , M_1T_1 , $M_1\theta_1$ les éléments correspondants sur S_1 .

Montrer que $M\theta$ et $M_1\theta_1$ sont parallèles. En déduire que, si MT tourne autour de M dans le plan tangent, MT et M_1T_1 se correspondent homographiquement; définir cette homographie au moyen des directions asymptotiques en M et M_1 .

2° Il y a deux directions MT telles que M_1T_1 soit parallèle à MT ; il existe sur S deux familles de courbes, à savoir les courbes (α) et les courbes (β) telles que les courbes correspondantes de S_1 , à savoir (α_1) et (β_1) admettant en chaque point une tangente parallèle à la tangente correspondante de (α) ou de (β) . Les courbes (α) et (β) sont conjuguées sur S ; les courbes (α_1) et (β_1) sont conjuguées sur S_1 .

3° Appliquer ce qui précède à une surface quelconque S et à une sphère S_1 . Montrer que l'on retrouve les lignes de courbure de S .

4° Vérifier que sur les deux surfaces

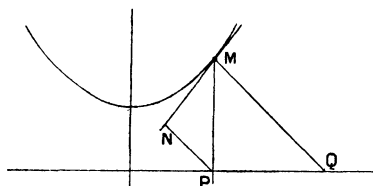
$$(S) \begin{cases} x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \\ y = 3\beta + 3\beta x^2 - \beta^3, \\ z = 3x^2 - 3\beta^2, \end{cases}$$

$$(S_1) \begin{cases} x_1 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \\ y_1 = \frac{-2\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \\ z_1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \end{cases}$$

dont la seconde (S_1) est une sphère, les points de paramètres α, β se correspondent d'après la règle précédente et que les courbes $\alpha = \text{const.}$ sur $\beta = \text{const.}$ se correspondent avec parallélisme des tangentes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Soit la chaînette $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$.

La parallèle à Oy menée par M coupe Ox en P . La perpendiculaire à la tangente abaissée de P coupe cette



tangente en N . On considère le lieu du point N . Construire cette courbe appelée « tractrice ».

II. En tournant autour de Ox la chaînette et la tractrice engendrent deux surfaces de révolution dont on demande de trouver les rayons de courbure principaux en M et en N .

Vérifier que la chaînette engendre une surface minima ($R + R' = 0$) et la tractrice une surface à courbure totale constante ($RR' = \text{const.}$). (Novembre 1910.)