

G. VALIRON

Le théorème de M. Picard pour les fonctions entières d'ordre nul

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11 (1911), p. 145-151

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__145_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D4b]

**LE THÉORÈME DE M. PICARD
POUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE NUL;**

PAR M. G. VALIRON.

Considérons une fonction entière d'ordre nul $f(z)$, le fait que $|f(z)|$ croît indéfiniment sur certains cercles [théorème de M. Wiman ⁽¹⁾], a conduit M. Mattson ⁽²⁾ à penser que, si l'on prend la fonction $f(z) + a$, a étant une constante, le rapport des nombres des zéros des deux fonctions, contenus dans un cercle de rayon r , tend vers un, lorsque r croît indéfiniment. Dans mon Mémoire des *Mathematische Annalen* j'avais indiqué la fonction

$$f(z) = \prod_1^{\infty} \left\{ 1 - \frac{z}{e_2 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^p \right]} \right\}^{E\left(\frac{3}{2}\right)^p},$$

[où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre x], comme échappant à la proposition précédente. Je vais considérer ici la fonction

$$(1) \quad F(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{e^{2^p}} \right)^{2^p},$$

qui donne des résultats plus nets.

1. Je vais d'abord calculer une valeur approchée

⁽¹⁾ Voir mon Mémoire : *Sur les fonctions entières d'ordre nul* (*Mathematische Annalen*, B. 70).

⁽²⁾ Voir RUBEN MATTSON, Thèse, Upsal, 1905, p. 47.

(146)

de $F(z)$ pour r voisin de e^{2^p} . Soit

$$z = e^{2^p} h e^{i\theta},$$

où h vérifie l'inégalité

$$\frac{1}{2} < h < 2,$$

et où θ est l'argument de z . On peut écrire

$$(2) \quad F(z) = A \cdot B \cdot C (1 - h e^{i\theta})^{2^p},$$

en posant

$$A = \frac{z^{\sum_{p=1}^{p-1} 2^p}}{\sum_{e=1}^{p-1} e^{2^p}}, \quad B = \prod_1^{p-1} \left(1 - \frac{e^{2^q}}{h e^{i\theta} e^{2^p}} \right)^{2^q},$$

$$C = \prod_{p+1}^{\infty} \left(1 - \frac{h e^{i\theta} e^{2^p}}{e^{2^p}} \right)^{2^p}.$$

On a immédiatement

$$A = \frac{e^{2^p(2^p-2)} h^{2^p-2} e^{i\theta(2^p-2)}}{e^{\frac{2^p-4}{3}}},$$

ou

$$(3) \quad A = e^{\frac{2}{3} 2^p - 2 \cdot 2^p + \frac{4}{3}} h^{2^p-2} e^{i\theta(2^p-2)}.$$

Calculons une valeur approchée de B . On a

$$\log B = \sum_1^{p-1} 2^q \log \left(1 - \frac{e^{2^q}}{h e^{i\theta} e^{2^p}} \right).$$

Mais

$$\log \left(1 - \frac{e^{2^q}}{h e^{i\theta} e^{2^p}} \right) = - \frac{e^{2^q}}{h e^{i\theta} e^{2^p}} (1 + \alpha_q),$$

où α_q est un nombre ayant pour limite zéro pour p

infini. Il vient donc

$$\log B = -\frac{1+\alpha}{he^{t\theta}e^{2^p}} \sum_1^{p-1} 2^q e^{2^q}, \quad \lim_{p=\infty} \alpha = 0.$$

Or

$$\sum_1^{p-1} 2^q e^{2^q} < e^{2^{p-1}} \sum_1^{p-1} 2^q < e^{2^{p-1}} 2^p,$$

de sorte que

$$(4) \quad |\log B| < \frac{(1+\alpha)e^{2^{p-1}} 2^p}{he^{2^p}} < \eta,$$

quelque petit que soit η , pourvu que p soit assez grand. De même on aura

$$\log C = \sum_{p+1}^{\infty} 2^r \log \left(1 - \frac{he^{t\theta}e^{2^p}}{e^{2^r}} \right) = -(1+\alpha)he^{t\theta}e^{2^p} \sum_{p+1}^{\infty} \frac{2^r}{e^{2^r}};$$

or

$$\sum_{p+1}^{\infty} \frac{2^r}{e^{2^r}} < \frac{2^{p+1}}{e^{2^{p+1}}} (1+k),$$

où k est très petit, car le rapport d'un terme au précédent dans $\sum_{p+1}^{\infty}$ est très petit.

On obtient donc encore ici

$$(5) \quad |\log C| < (1+\alpha)he^{2^p} \frac{2^{p+1}}{e^{2^{p+1}}} (1+k) < \eta'.$$

η' étant arbitrairement petit, et p suffisamment grand. Les inégalités (4) et (5) donnent

$$B.C = (1+\varepsilon),$$

ε étant un nombre complexe tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$.

En portant cette valeur et celle de A dans l'expres-

sion (2), on aura

$$(6) \quad F(z) = (1 + \varepsilon) e^{\frac{2}{3}4^p - 2 \cdot 2^p + \frac{4}{3}} h^{2^p - 2} e^{i\theta(2^p - 2)} (1 - h e^{i\theta})^{2^p},$$

égalité valable pour $\frac{1}{2} < h < 2$ (et même dans de beaucoup plus larges limites).

2. Soit alors l'équation

$$(7) \quad F(z) - a e^{i\omega} = 0.$$

Il résulte tout d'abord de l'égalité (6) que les deux fonctions $F(z)$ et $F(z) - a e^{i\omega}$ ont le même nombre de zéros dans les cercles de rayons

$$\frac{e^{2^p}}{2} \quad \text{et} \quad 2 e^{2^p}.$$

En effet, la différence des nombres des zéros des deux fonctions contenus dans le cercle de rayon r est

$$n_0 - n_a = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_c d\{\log[F(z)]\} - \int_c d\{\log[F(z) - a e^{i\omega}]\} \right),$$

$\int_c$ désignant l'intégrale prise le long du cercle de rayon r ; or l'expression précédente s'écrit

$$n_0 - n_a = \frac{1}{2\pi i} - \int_c d\left\{\log\left[1 - \frac{a e^{i\omega}}{F(z)}\right]\right\};$$

pour $r = \frac{e^{2^p}}{2}$ l'égalité (6) montre que

$$|F(z)| > e^{\frac{2}{3}4^p(1 - \varepsilon_1)};$$

donc

$$\left| \frac{a e^{i\omega}}{F(z)} \right| < 1,$$

pourvu que p soit assez grand, c'est-à-dire qu'on a

$$n_0 = n_a.$$

On aura le résultat analogue pour le cercle de rayon $2e^{2^p}$.

Comme conséquence on voit que l'équation (7) a 2^p racines comprises entre les deux cercles considérés.

Nous allons calculer des valeurs approchées de ces racines.

3. En remplaçant dans (7) $F(z)$ par l'expression (6), nous aurons

$$(1 + \varepsilon) e^{\frac{2}{3} 2^p - 2 \cdot 2^p + \frac{4}{3}} h^{2^p - 2} e^{i\theta(2^p - 2)} (1 - h e^{i\theta})^{2^p} = a e^{i\omega},$$

ou encore, ε' tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$,

$$e^{\frac{2}{3} 2^p (1 - \varepsilon')} e^{i\theta(2^p - 2)} (1 - h e^{i\theta})^{2^p} = a e^{i\omega},$$

et par suite

$$(1 - h e^{i\theta})^{2^p} = \frac{a e^{i[\omega - \theta(2^p - 2)]}}{e^{\frac{2}{3} 2^p (1 - \varepsilon')}},$$

d'où

$$(8) \quad 1 - h e^{i\theta} = \frac{\alpha^{\frac{1}{2^p}}}{e^{\frac{2}{3} 2^p (1 - \varepsilon')}} e^{i \left(\frac{\omega}{2^p} - \theta + \frac{\theta}{2^{p-1}} \right)} e^{i \frac{2k\pi}{2^p}},$$

avec $k = (0, 1, 2, \dots, 2^p - 1)$.

Il résulte de cette égalité que θ est d'ordre inférieur à $\frac{\alpha^{\frac{1}{2^p}}}{e^{\frac{2}{3} 2^p (1 - \varepsilon)}}$, et que nous aurons en première approximation 2^p valeurs pour $h e^{i\theta}$,

$$h_k e^{i\theta_k} = 1 - \frac{\alpha^{\frac{1}{2^p}}}{e^{\frac{2}{3} 2^p (1 - \varepsilon')}} e^{i \frac{2k\pi}{2^p}}.$$

Les racines correspondantes de l'équation (7) sont

$$z_k = e^{2^p} h_k e^{i\theta_k}$$

Par suite :

Les 2^p racines de l'équation (7) comprises entre les cercles de rayons $\frac{e^{2p}}{2}$ et $2e^{2p}$ ont sensiblement pour points représentatifs les sommets d'un polygone régulier ayant pour centre le point e^{2p} et pour rayon $e^{\frac{2p}{3}(1-\varepsilon')}$.

Prenons alors le rapport des nombres des zéros des fonctions $F(z)$ et $F(z) - ae^{i\omega}$, ce rapport est égal à *un* pour le cercle de rayon

$$e^{2p} - e^{\frac{2p}{3}(1-\varepsilon')},$$

puis il va en décroissant jusqu'à une valeur voisine de $\frac{2}{3}$ pour le cercle $e^{2p} - \varepsilon$, il saute à la valeur $\frac{3}{2}$ pour $e^{2p} + \varepsilon$, puis décroît jusqu'à *un* pour le cercle

$$e^{2p} + e^{\frac{2p}{3}(1-\varepsilon')}.$$

Ce rapport n'a donc pas de limite.

Il importe de remarquer que, pour les deux fonctions

$$F(z) + a_1, \quad F(z) + a_2,$$

le rapport en question aura bien pour limite *un*, quels que soient les nombres a_1 et a_2 différents de zéro, parmi les fonctions $F(z) + a$ une seule présente donc un cas d'exception.

4. La démonstration précédente met aussi en évidence l'inexactitude d'une proposition de M. Zölllich⁽¹⁾,

(¹) ZÖLLICH, *Beiträge zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen der Ordnung Null* (Inaugural Dissertation, Halle, 1908).

d'après laquelle les *zéros des fonctions* $f(z) + a$, $f(z)$ *étant une fonction entière d'ordre nul, sont situés à l'intérieur de cercles ayant pour centre les zéros de* $f(z)$ *et dont les rayons sont de l'ordre de l'inverse des modules des zéros.*

En terminant je remarquerai que la fonction $f(z)$, qui est certainement très spéciale, est pourtant *très régulière* puisque r_n étant le $n^{\text{ième}}$ zéro, on a

$$r_n = e^{hn},$$

avec

$$\frac{1 - \varepsilon}{2} < h < 2(1 + \varepsilon).$$