

G. VALIRON

Note sur la règle de Duhamel

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 11
(1911), p. 137-140

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1911_4_11__137_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D2a α]

NOTE SUR LA RÈGLE DE DUHAMEL ;

PAR M. G. VALIRON.

1. Considérons une série à termes positifs dans laquelle le rapport d'un terme au précédent a pour

limite un, et posons

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \alpha_n.$$

La quantité α_n a pour limite zéro lorsque n croît indéfiniment. Nous aurons

$$u_n = \frac{u_{n_0}}{(1 + \alpha_{n_0}) \dots (1 + \alpha_n)},$$

et l'on voit que si la série $\Sigma |\alpha_n|$ converge, le produit qui est un dénominateur reste fini, u_n ne tend pas vers zéro, la série u_n est divergente.

Supposons donc que la série $\Sigma |\alpha_n|$ diverge, mais que la série $\Sigma \alpha_n^2$ converge; nous pourrions écrire en posant $e(x) = e^x$

$$u_n = \frac{u_{n_0}}{e\left(\sum_{n_0}^n \alpha_n\right) \prod_{n_0}^n (1 + \alpha_n) e^{-\alpha_n}}.$$

L'hypothèse faite sur $\Sigma \alpha_n^2$ entraîne la convergence du produit infini qui est en dénominateur et par suite les séries de termes généraux u_n et $e\left(-\sum_{n_0}^n \alpha_n\right)$ convergent ou divergent en même temps. Si l'on remarque que la série $e\left(-\sum_{n_0}^n \alpha_n\right)$ diverge lorsque la série $\Sigma |\alpha_n|$ converge (puisque le terme général reste fini), on a le résultat suivant :

La série u_n converge ou diverge suivant que la série $v_n = e\left(-\sum_{n_0}^n \alpha_n\right)$ converge ou diverge (toutes les fois que la série $\Sigma \alpha_n^2$ converge).

2. Supposons en particulier toutes les quantités α_n

positives, et décroissantes, et soit $\alpha(x)$ une fonction continue décroissante égale à α_n pour $x = n$. On sait qu'on a

$$\sum_{n_0+1}^n \alpha_n < \int_{n_0}^n \alpha(x) dx < \sum_{n_0}^{n-1} \alpha_n,$$

et, par conséquent, en posant $w_n = e\left(-\int_{n_0}^n \alpha(x) dx\right)$,

$$v_{n-1} < w_n < v_n e^{\alpha_{n_0}},$$

ce qui montre que les séries de termes w_n et v_n convergent ou divergent en même temps, donc aussi les séries w_n et v_n .

On a ainsi la proposition suivante :

En supposant que la série $\Sigma \alpha_n^2$ soit convergente, la série u_n converge ou diverge suivant que la série de terme général $w_n = e\left(-\int_{n_0}^n \alpha(x) dx\right)$ converge ou diverge.

On retrouve ainsi la règle de Duhamel et les critères de deuxième espèce de Bertrand.

1° Si $\alpha_n = \frac{k}{n}$, on aura

$$w_n = \frac{A}{n^k};$$

la série u_n converge si $k > 1$, diverge si $k \leq 1$. *A fortiori*, si $n\alpha_n > k > 1$, la série converge et diverge si $n\alpha_n \leq 1$.

2° Prenons

$$\alpha_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n \log n} + \dots + \frac{k}{n \log n \dots (\log_p n)},$$

on aura

$$w_n = \frac{A}{n(\log n) \dots (\log_p n)^k},$$

série qui converge pour $k > 1$, diverge pour $k \leq 1$. On obtient les critères de Bertrand.

3° Le résultat du n° 1 montre que si l'on a

$$\alpha_n = \frac{1 + \beta_n}{n},$$

la série u_n diverge si la série $\sum \frac{\beta_n}{n}$ converge.
