NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. VILLAT

Sur les surfaces réglées rapportées à leurs asymptotiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 97-107

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__97_0>

[O^{1}4f]

SUR LES SURFACES RÉGLÉES RAPPORTÉES A LEURS ASYMPTOTIQUES;

PAR M. H. VILLAT.

Dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces*, M. Darboux signale, à propos des surfaces à lignes de courbures planes, l'intérêt que présentent des formules propres à représenter une surface réglée rapportée à ses asymptotiques (Darboux, t. IV, p. 214). Il cite à ce propos une Note de M. Kœnigs, où celui-ci a obtenu de telles formules, entièrement débarrassées de tout signe de quadratures. On trouvera dans ce qui va suivre des formules tout à fait différentes de celles de M. Kœnigs, et qui, bien que comportant encore des signes de quadratures, sont peut-être susceptibles de rendre service, vu leur très grande simplicité.

On sait qu'une surface quelconque, rapportée à ses lignes asymptotiques, peut être représentée par des équations de la forme suivante (éq. de M. Lelieuvre),

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \int \left(F_2\frac{\partial F_3}{\partial u} - F_3\frac{\partial F_2}{\partial u}\right) du - \left(F_2\frac{\partial F_3}{\partial v} - F_3\frac{\partial F_2}{\partial v}\right) dv, \\ y &= \int \left(F_3\frac{\partial F_1}{\partial u} - F_1\frac{\partial F_3}{\partial u}\right) du - \left(F_3\frac{\partial F_1}{\partial v} - F_1\frac{\partial F_3}{\partial v}\right) dv, \\ z &= \int \left(F_1\frac{\partial F_2}{\partial u} - F_2\frac{\partial F_1}{\partial u}\right) du - \left(F_1\frac{\partial F_2}{\partial v} - F_2\frac{\partial F_1}{\partial v}\right) dv, \end{aligned}\right.$$

où les fonctions F_1, F_2, F_3 sont trois fonctions des deux variables u et v, assujetties à être toutes trois solutions d'une même équation de Laplace à invariants égaux, de la forme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} = kF.$$

Cherchons à déterminer le choix des fonctions F convenant à une surface réglée. Supposons que les droites de la surface soient, dans les formules (1), les courbes $v =$ const. Appelons p, q, -1 les quantités, fonctions de v, qui dirigent une de ces droites; si nous observons, comme il est bien connu, que les cosinus directeurs de la normale à la surface sont proportionnels à F_1, F_2, F_3, nous devrons tout d'abord avoir la condition suivante, au moins nécessaire,

$$(2) \qquad F_3 = pF_1 + qF_2,$$

qui exprime qu'une droite de la surface est dans le plan tangent; d'ailleurs, cette condition est aussi suffisante.

En effet, si cette condition est remplie, tout le long de l'une des courbes $v =$ const., la normale à la surface sera perpendiculaire à une direction fixe p, q, -1; donc cette courbe sera la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la surface, parallèlement à cette direction. Et comme, de plus, nous savons que la courbe est une asymptotique, son plan osculateur devra être toujours parallèle à cette direction. Donc, ou bien ce plan osculateur est fixe, et la courbe est plane, dans un plan parallèle à cette direction; mais alors la surface est une surface développable, enveloppe du plan en question; ou bien ce plan osculateur est indéterminé, et alors la courbe est une droite parallèle à la direction p, q, -1, et la surface est réglée.

Donc, en exceptant le cas des surfaces développables exclu déjà, d'ailleurs, dans les formules (1), la condition (2) sera nécessaire et suffisante pour que les formules (1) représentent une surface réglée.

Nous allons maintenant faire voir que la condition (2) entraîne, entre autres conséquences, que l'équation de Laplace à laquelle satisfont les F est une équation du second rang; les solutions de cette équation seront donc connues.

A cause de l'équation (2), on a par dérivation

$$\frac{\partial F_3}{\partial u} = p\frac{\partial F_1}{\partial u} + q\frac{\partial F_2}{\partial u},$$

puis, par une nouvelle dérivation par rapport à v, et tenant compte de l'équation du second ordre à laquelle satisfont les F,

$$0 = \frac{dp}{dv}\frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{dq}{dv}\frac{\partial F_2}{\partial u},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\partial F_2}{\partial u} = g(v)\frac{\partial F_1}{\partial u}.$$

D'où, en dérivant deux fois et tenant compte toujours de la même équation,

$$(3) \qquad \frac{d\log g}{dv}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial F_1}{\partial u}\right) = 0.$$

Laissons de côté le cas où g serait constant, auquel cas la surface étudiée se réduirait à une droite, F_1 et F_2 ne différant alors que par un facteur constant. L'équation (3) développée devient

$$(4) \qquad \frac{1}{k}\frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} + \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial \frac{1}{k}}{\partial u} = 0,$$

puis, en dérivant de nouveau, par rapport à v et simplifiant,

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2}\frac{\partial\left(\frac{1}{k}\right)}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial u}\times\left(1 + \frac{\partial^2 \frac{1}{k}}{\partial u\,\partial v}\right) = 0.$$

Maintenant, les équations (4) et (5) nous permettent d'éliminer F_1. On a de suite

$$\frac{\frac{\partial\left(\frac{1}{k}\right)}{\partial v}}{\frac{1}{k}} = \frac{\frac{\partial^2\left(\frac{1}{k}\right)}{\partial u\,\partial v} + 1}{\frac{\partial\left(\frac{1}{k}\right)}{\partial u}},$$

ce qui se met immédiatement sous la forme

$$\frac{\partial^2 \log k}{\partial v\,\partial u} = k, \tag{6}$$

ce qui exprime évidemment que l'équation à laquelle satisfont les F est bien du second rang. Cette équation pourra donc être intégrée par l'application de la méthode de Laplace.

Tout d'abord, l'équation (6) se ramène à l'équation de Lionville en prenant $\log k$ comme inconnue. On en conclut, d'après un résultat bien connu, que l'intégrale générale de l'équation (6) est

$$k = \frac{2\,U'V'}{(U+V)^2},$$

en désignant par U et V deux fonctions arbitraires, respectivement de u et de v.

L'équation du second ordre, dont les trois fonctions F sont solutions, est dès lors la suivante :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} = \frac{2\,U'V'}{(U+V)^2}\,F. \tag{7}$$

L'intégrale générale de cette équation est (*cf.* Darboux, *Théorie des surfaces*, § 395)

$$F = \frac{2(U_1+V_1)}{U+V} - \frac{U_1'}{U'} - \frac{V_1'}{V'},$$

U_1 et V_1 désignant deux nouvelles fonctions arbitraires respectivement de u et de v.

Au surplus, il est extrêmement facile de retrouver ce résultat élémentairement.

Faisons, en effet, dans l'équation (7) la transformation de Laplace

$$\frac{\partial F}{\partial v} = G. \tag{8}$$

L'élimination de F nous donne de suite pour G l'équation

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2V'}{U+V} - \frac{V''}{V'}\right) - 2\frac{U'V'}{(U+V)^2}G = 0,$$

laquelle prend la forme simple

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial G}{\partial v} + G\left(\frac{2V'}{U+V} - \frac{V''}{V'}\right)\right] = 0.$$

D'où, en désignant par V_2 une fonction arbitraire de v, l'équation linéaire

$$\frac{\partial G}{\partial v} + G\left(\frac{2V'}{U+V} - \frac{V''}{V'}\right) = V_2,$$

dont la solution est

$$G = \frac{V'}{(U+V)^2}\left(K + \int V_2 \frac{(U+V)^2}{V'}\, dv\right),$$

K désignant la constante de l'intégration, c'est-à-dire une fonction arbitraire de u.

Il suffit maintenant de poser

$$\frac{V_2}{V'} = V'_3,$$

puis successivement

$$V_3 V' = V'_4 \qquad \text{et} \qquad V_4 V' = V'_5,$$

pour que les intégrales $\int V'_3 U^2\, dv$, $\int V'_3 UV\, dv$,

$\int V'_3 V^2 dv$, qui figurent dans l'expression de G, s'effectuent toutes trois par parties. Une fois G obtenu, on en conclura F par la relation $\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{2U'V'}{(U+V)^2} \times F$ déduite de (7) et (8), et, à la notation près, on retombera sur l'expression de F déjà signalée.

Nous sommes maintenant assurés de la forme nécessaire des trois fonctions F qui doivent figurer dans les formules (1). Avant d'aller plus loin, observons qu'il est permis, sans rien changer à la surface, de remplacer les paramètres u et v par les fonctions U et V des mêmes paramètres. Nous pouvons dès lors prendre pour F_1, F_2, F_3 les valeurs suivantes :

$$F_1 = \frac{2(U_1 + V_1)}{u+v} - U'_1 - V'_1,$$

$$F_2 = \frac{2(U_2 + V_2)}{u+v} - U'_2 - V'_3,$$

$$F_3 = \frac{2(U_3 + V_3)}{u+v} - U'_3 - V'_3.$$

Mais il n'est pas certain que ces expressions satisfassent à la condition (2). Voyons tout d'abord si elles vérifient la condition (3), que nous avions déduite de (2). Ceci nous donne

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{(u+v)^2 \times \left[2\frac{U_1+V_1}{(u+v)^2} - 2\frac{U'_1}{u+v} + U''_1\right]\right\} = 0$$

ou, en réduisant,

$$U'''_1 = 0.$$

De sorte que U_1 devra être un polynome du second degré; il en sera naturellement de même pour U_2 et U_3, à cause de la symétrie. Nous poserons

$$U_1 = a_1 u^2 + 2b_1 u + c_1,$$

$$U_2 = a_2 u^2 + 2b_2 u - c_2,$$

$$U_3 = a_3 u^2 + 2b_3 u + c_3.$$

Il viendra ensuite

$$F_1 = \frac{2}{u+v}(V_1 + a_1 u^2 + 2b_1 u + c_1) - V'_1 - 2a_1 u - 2b_1,$$

ce qu'on mettra facilement sous la forme

$$F_1 = \frac{2}{u+v}(V_1 + a_1 v^2 - 2b_1 v + c_1) - (V'_1 + 2a_1 v - 2b_1).$$

On voit alors qu'il suffira de poser

$$V_1 + a_1 v^2 - 2b_1 v + c_1 = W_1,$$

pour obtenir

$$F_1 = \frac{2W_1}{u+v} - W'_1.$$

Naturellement, on aura de même

$$(9) \qquad \begin{aligned} F_2 &= \frac{2W_2}{u+v} - W'_2, \\ F_3 &= \frac{2W_3}{u+v} - W'_3, \end{aligned}$$

les fonctions W étant trois fonctions absolument quelconques de v.

Il est maintenant facile de s'assurer que les expressions trouvées finalement pour F_1, F_2, F_3 satisfont bien à une relation de la forme (2); les quantités p et q (fonctions de v) seront définies par les équations

$$\begin{aligned} W_3 &= pW_1 + qW_2, \\ W'_3 &= pW'_1 + qW'_2. \end{aligned}$$

De sorte qu'il ne reste plus qu'à transporter les expressions (9) des F dans les formules (1) pour obtenir les formules cherchées, convenant à toute surface réglée rapportée à ses asymptotiques.

Nous obtenons ainsi, par un calcul immédiat,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{2W}{(u+v)^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{2W}{(u+v)^2} + \frac{2W'}{u+v} - W'',$$

puis

$$\begin{aligned} dx = {} & \frac{2}{(u+v)^2}(W_3W'_2 - W_2W'_3)\,du \\ & + \frac{2}{(u+v)^2}(W_3W'_2 - W_2W'_3)\,dv \\ & + 2(W_2W''_3 - W_3W''_2)\frac{dv}{u+v} - (W'_2W''_3 - W'_3W''_2)\,dv \end{aligned}$$

ou encore

$$dx = d\left[\frac{2}{u+v}(W_2W'_3 - W_3W'_2)\right] - (W'_2W''_3 - W'_3W''_2)\,dv,$$

et enfin

$$x = \frac{2}{u+v}(W_2W'_3 - W_3W'_2) - \int (W'_2W''_3 - W'_2W''_2)\,dv$$

et de même

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \\ z = \end{array} \right. \qquad \text{par permutation circulaire des indices.}$$

Application. — Comme application, proposons-nous de retrouver, parmi les surfaces précédentes, les surfaces du second degré, qui en font partie *a priori*. Je dis qu'il suffira, pour les obtenir, de prendre pour W_1, W_2, W_3 des polynomes quelconques du second degré.

En effet, il suffira d'écrire que les lignes $u = \text{const.}$, qui constituent le second système de lignes asymptotiques, sont toutes des lignes droites. On y parvient aisément, par exemple en écrivant que le plan osculateur est indéterminé le long d'une de ces lignes, ce qui donne les relations

$$\frac{\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial x}{\partial v}} = \frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial y}{\partial v}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial v}}.$$

Or on vérifie immédiatement la relation

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = &-\frac{2}{u+v}\frac{\partial x}{\partial v}\\ &+\frac{2}{u+v}(W_2 W_3''' - W_3 W_2''') - (W_2' W_3''' - W_3' W_2'''),\end{aligned}$$

et analogues; et il reste à écrire les conditions

$$\frac{\dfrac{2}{u+v}(W_2 W_3''' - W_3 W_2''') - (W'_2 W_3''' - W'_3 W_2''')}{-\dfrac{2}{(u+v)^2}(W_2 W'_3 - W_3 W'_2) + \dfrac{2}{u+v}(W_2 W''_3 - W_3 W''_2) - (W'_2 W''_3 - W'_3 W''_2)} = \ldots = \ldots$$

(les deux derniers rapports se déduisent du premier par permutation circulaire des indices).

En multipliant les deux termes de chaque rapport par W_1''', W_2''', W_3''', *supposés non tous nuls* pour le moment, nous obtenons ce quatrième rapport, égal aux trois premiers,

$$\frac{0}{-\dfrac{2}{(u+v)^2}\,|\,W_1 W'_1 W_1'''\,| + \dfrac{2}{u+v}\,|\,W_1 W''_1 W_1'''\,| - |\,W'_1 W''_1 W_1'''\,|}.$$

Au dénominateur figurent trois déterminants dont nous n'avons écrit que la première ligne.

De l'égalité des quatre rapports, nous déduisons maintenant : ou bien que le dénominateur du dernier soit nul (quel que soit u, bien entendu), ou bien que les numérateurs des trois premiers rapports soient tous nuls (également quel que soit u).

La première de ces deux hypothèses entraîne que les trois déterminants signalés soient nuls; on voit alors de suite que cela exige l'existence d'une relation linéaire et homogène à coefficients constants, entre les trois fonctions W_1, W_2, W_3. Ce cas ne fournit rien d'intéressant, car l'on voit immédiatement que la relation

$$W_3 = aW_1 + bW_2$$

conduit à

$$x = -az + \text{const.}$$

et

$$y = -bz + \text{const.}$$

On n'a donc plus affaire à une surface.

La seconde hypothèse nous donne

$$W_2 W_3''' - W_3 W_2''' = 0,$$
$$W_2' W_3''' - W_3' W_2''' = 0,$$

et quatre équations analogues par permutation circulaire. Or, on en tirera facilement que, si les W ne sont pas proportionnels entre eux, leurs rapports étant constants (cas qu'il faut écarter comme on l'a vu il y a un instant), ces équations entraînent

$$W_1''' = W_2''' = W_3''' = 0.$$

Nous sommes donc ramenés à l'hypothèse que nous avions écartée au début, et qui seule nous donnera une solution intéressante : les trois fonctions W seront alors des polynomes du second degré. On vérifie immédiatement que, en déterminant ainsi les W, on retrouve bien les surfaces du second degré; nous laisserons de côté ce calcul élémentaire.

Note. — Cet article était déjà imprimé quand la lecture d'une Note de M. Raffy [*Sur les surfaces à lignes de courbure confondues* (*Comptes rendus*, 1908)] a averti l'auteur que M. Goursat avait fait connaître en 1896 des formules analogues aux formules (10). L'auteur tient à reconnaître ici la priorité de M. Goursat, avec lequel il s'est ainsi rencontré.