Nouvelles annales de mathématiques

Tsuruichi Hayashi

Sur une équation indéterminée

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 10 (1910), p. 83-86

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__83_1>

[I19c]

SUR UNE ÉQUATION INDÉTERMINÉE;

PAR M. TSURUICHI HAYASHI, à Tokio.

I. A.-M. Legendre a établi dans sa *Théorie des Nombres* qu'un nombre triangulaire ne peut être égal à un cube. Il s'appuie pour cela sur l'impossibilité démontrée par lui, l'équation indéterminée

$$x^3 + y^3 = 3z^3. \tag{1}$$

J'établirai ici que *le quadruple d'un nombre pyramidal ne saurait être un cube,* en me servant de la même équation.

On aurait une démonstration assez simple en appliquant la condition de possibilité, trouvée par Édouard Lucas, de l'équation indéterminée

$$x^3 + y^3 = \mathrm{A} z^3 \quad ([1]).$$

J'aurai recours à une méthode plus directe, qui me semble présenter un certain intérêt.

II. Supposons que l'équation (1) soit possible; alors $x + y$ est divisible par 3, car on a

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3(x^2 y + xy^2) = 3(z^3 + x^2 y + xy^2).$$

Posons

$$x + y = 3k.$$

On a

$$(2) \quad x^3 + y^3 = x^3 + (3k - x)^3 = 27k^3 - 27k^2 x + 9kx^2.$$

$3z^3$ est donc divisible par 9, et, par suite, z est divisible par 3.

Posons

$$(3) \qquad z = 3^p h,$$

l'exposant p étant $\geqq 1$, et h premier à 3.

Les nombres x, y, z peuvent être supposés premiers entre eux deux à deux ; x et y sont donc premiers à 3. On a, en vertu de l'égalité (2),

$$9k(3k^2 - 3kx + x^2) = 3z^3.$$

Si donc on pose

$$(4) \qquad 3z^3 = 9kk',$$

k' est premier à 3, puisque x l'est aussi. Or on a, d'après (3),

$$3^{3p+1} h^3 = 9\, kk',$$

---

[1] Voir *Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, t. XVII, 1878, p. 425.

k est donc divisible par 3^{3p-1}. Posons

$$k = 3^{3p-1}l \qquad (l \text{ premier à } 3).$$

Il en résulte

$$h^3 = lk'.$$

Remarquons, en outre, que x est premier à k, à cause de

$$x + y = 3k.$$

Par suite, en vertu de

$$k' = 3k^2 - 3kx + x^2,$$

k' est premier à k et, par suite, à l. On doit donc avoir

$$l = l_1^3, \qquad k' = k_1^3,$$

l_1 et k_1 étant premiers entre eux et premiers chacun à 3. On a donc finalement

$$x^3 + y^3 = 3.3kk' = 3.3^{3p}l_1^3k_1^3,$$
$$x + y = 3k = 3^{3p}l_1^3, \qquad z = 3^p l_1 k_1.$$

Et d'après le résultat obtenu par Legendre et rappelé plus haut, nous pouvons affirmer qu'il est impossible de trouver pour x, y, z, p, l_1, k_1 des valeurs entières qui satisfassent les équations précédentes.

III. On peut écrire

$$x^3 + y^3 = 3.3kk' = 3(x+y)k_1^3,$$

d'où

$$x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy = qk^2 - 3x(3k - x) = 3k_1^3,$$

ce qui peut s'écrire

$$(2x - 3k)^2 + 3k^2 = 4k_1^3.$$

L'équation précédente sera satisfaite si l'on pose

$$2x - 3k = 2X(9Y^2 - X^2),$$
$$k = 6Y(Y^2 - X^2),$$
$$k_1 = X^2 + 3Y^2,$$

où X et Y sont des entiers arbitraires. Or on devrait avoir, comme on l'a vu,

$$3k = 3^{3p} l_1^3.$$

Prenons, par exemple, $p = 1$. On aura

(7) $$3k = 18\,Y(Y^2 - X^2) = 3^3 l_1^3.$$

D'autre part, on trouve aisément

$$x = 9\,Y(Y^2 - X^2) + X(9\,Y^2 - X^2),$$
$$y = 9\,Y(Y^2 - X^2) - X(9\,Y^2 - X^2),$$
$$z = 3\,l_1 k_1 = 3\,l_1(X^2 + 3\,Y^2).$$

On voit donc que, si l'équation (7) était possible, on pourrait trouver trois nombres x, y, z, déterminés par les formules précédentes, et tels que

$$x^3 + y^3 = 3\,z^3.$$

Or, cette dernière équation est démontrée impossible. Il en est donc de même de l'équation (7).

IV. L'équation (7) peut s'écrire

$$4\,\frac{(Y - X)\,X\,(Y + X)}{6} = l_1^3,$$

ou, en posant

$$Y - X = \alpha, \qquad X = \beta,$$
$$4\,\frac{\alpha(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)}{6} = l_1^3.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Le quadruple d'un nombre de la forme

$$\frac{\alpha(\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)}{6}$$

ne peut être un cube.

En particulier, le quadruple d'un nombre pyramidal $\frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{6}$ *ne peut être un cube.*