

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10 (1910), p. 381-384

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__381_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BIBLIOGRAPHIE.

LEÇONS SUR LES THÉORIES GÉNÉRALES DE L'ANALYSE,
par M. *René Baire*. Tome II : VARIABLES COMPLEXES;
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES. Un volume grand in-8,
x-347 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908. Prix : 12^{fr}.

J'ai déjà exprimé mon admiration pour le Tome I des
Leçons publiées par M. René Baire ⁽¹⁾. Le Tome II ne lui

(1) *Nouvelles Annales*, 1907, p. 508.

cède en rien : nous y retrouvons le même souci d'une rigueur parfaite, la même élégance, et surtout ce même sentiment profond de l'ordonnance des faits, qui donne à l'Ouvrage un caractère d'unité et d'harmonie. On ne citerait guère de livres où la vérité mathématique soit à la fois serrée d'aussi près et vue d'aussi haut. Il ne faut pas hésiter à prononcer à propos de celui-ci le mot de chef-d'œuvre.

Le Chapitre IV (les trois premiers Chapitres composent le Tome I) est consacré aux fonctions analytiques. C'est une étude qu'on aborde souvent en distinguant le point de vue de Cauchy, celui de Riemann, celui de Weierstrass.

L'auteur estime qu'un tel « scrupule traditionnaliste » est aujourd'hui sans raison d'être. Il lui semble préférable de synthétiser l'œuvre des créateurs de l'Analyse, de manière à profiter de tous les avantages que présentent leurs diverses méthodes. Il utilise donc concurremment la notion d'intégrale de variables complexes et celle de série entière, et les premiers paragraphes du Chapitre ont pour objet d'établir le théorème fondamental, d'après lequel toute fonction ayant une dérivée est par cela même représentable par une série entière. Le théorème est plus loin étendu de la façon la plus élégante aux fonctions de plusieurs variables; en même temps sont établies des inégalités qui seront utiles plus tard, dans la démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations différentielles.

Signalons encore le parti que tire M. Baire, dans l'étude des séries, de la notion de *convergence normale*. Il dit qu'une série est normalement convergente quand ses termes sont inférieurs en module à ceux d'une série numérique convergente. Cette notion est plus maniable que celle de la convergence uniforme, et systématiquement appliquée, permet de simplifier plusieurs démonstrations.

Au Chapitre V on aborde les équations différentielles. Le théorème fondamental sur l'existence des intégrales est exposé en trois pages (deuxième démonstration de Cauchy, dite par le *Calcul des limites*). Le reste du Chapitre est surtout consacré aux équations différentielles qu'on sait intégrer : équations du premier ordre homogènes, linéaires, de Lagrange, etc.; équations différentielles linéaires; équations aux dérivées partielles du premier ordre, dont il est fait une étude assez approfondie. Le Chapitre se termine par quelques indications

succinctes sur les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, avec une application au problème de la propagation du son.

Le Chapitre VI concerne les applications géométriques. En cent et quelques pages, l'auteur a réussi à condenser tous les principes essentiels de la géométrie des courbes et des surfaces : enveloppes, courbure et torsion des courbes, contact des courbes et des surfaces, courbure des surfaces, lignes asymptotiques, lignes de courbure, surfaces réglées, déformation et représentation des surfaces, lignes géodésiques.

Dans le traitement de tous ces sujets, M. Baire apporte ses qualités ordinaires de concision élégante en même temps que le soin d'élucider à fond toutes les questions délicates, en particulier les questions de signe. Signalons par exemple le paragraphe relatif à la courbure et à la torsion d'une courbe gauche, et à l'étude de la disposition de cette courbe par rapport au trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale en un de ses points.

Enfin le Chapitre VII, qui termine le Livre, a pour objet l'étude des fonctions elliptiques, présentées comme illustration des principes généraux de l'Analyse. Il existe plusieurs manières d'exposer la théorie de ces fonctions, et aucune ne paraît encore s'être imposée définitivement. Voici comment procède l'auteur : il débute par la théorie des produits infinis, dont il donne comme exemples les développements de $\sin x$ et $\cos x$. Il définit ensuite la fonction σu par l'égalité

$$\sigma u = u \prod' \left[\left(1 - \frac{u}{s} \right) e^{\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2}} \right],$$

($s = 2m\omega + 2n\omega'$; $m, n \neq 0$).

La convergence et les propriétés fondamentales de σu étant établies, on introduit les fonctions

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}, \quad pu = -\zeta' u.$$

On reconnaît que pu est méromorphe et doublement périodique. Viennent ensuite les théorèmes concernant les fonctions les plus générales qui présentent ce double carac-

tère, c'est-à-dire *les fonctions elliptiques* (une fonction elliptique entière se réduit à une constante, la somme des résidus dans un parallélogramme de périodes est nulle, etc.). Ces théorèmes permettent d'approfondir l'étude de la fonction p , en particulier d'établir la relation fondamentale

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 p u - g_3.$$

On passe aux trois modes d'expression classiques d'une fonction elliptique au moyen de σ , de ζ , de p et p' , ce qui donne entre autres la formule d'addition de pu .

Le cas des invariants réels et le problème de l'inversion pour ce cas sont examinés de près. Enfin, dans quelques pages qui terminent le volume, sont esquissées les applications géométriques des fonctions elliptiques : courbes de genre 1, théorème de Poncelet.

On remarquera qu'il n'est pas question des séries thêta. C'est qu'en effet l'introduction de ces séries se justifie surtout quand on veut pousser l'emploi des fonctions elliptiques jusqu'aux calculs numériques ou bien dans certaines applications à la théorie des nombres. De tels développements étaient tout à fait en dehors des limites que s'était fixées l'auteur, et il n'aurait pu s'y engager sans faire perdre à son Ouvrage le caractère de généralité qu'il s'était expressément prescrit.

R. B.

