

REBEIX

**Section plane d'un cône ou d'un cylindre à
base elliptique, hyperbolique ou parabolique**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 107-122

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__107_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[L²2c]

**SECTION PLANE D'UN CÔNE OU D'UN CYLINDRE
A BASE ELLIPTIQUE, HYPERBOLIQUE OU PARABOLIQUE;**

PAR M. REBEIX.

La section plane d'un cône à base circulaire figure depuis 1905 au programme de Géométrie descriptive de la classe de Mathématiques.

On admet dans tous les cours que cette section est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, puis que sa projection orthogonale sur un plan est une courbe de même espèce. M. Hadamard a donné en 1905, dans ce journal, une démonstration géométrique de ces deux faits. Je vais en exposer une nouvelle qui pourrait, je crois, être comprise de tout bon élève, car elle ne fait intervenir que des notions tout à fait élémentaires.

Je traite auparavant deux problèmes :

PROBLÈME I. — *Construire les foyers F et F' d'une conique à centre, sachant qu'elle est tangente en deux points donnés A et B à deux droites parallèles AX et BY et que de plus*

$$FA.FB = k.$$

Si F est assujetti à être entre AX et BY, la conique ne peut être qu'une ellipse; si F doit être en dehors, elle ne peut être qu'une hyperbole.

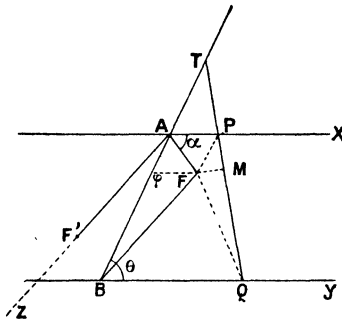
Dans les deux cas, les rayons vecteurs AF et AF' du

point A étant également inclinés sur AX et, de plus, AF' et BF étant parallèles comme symétriques par rapport au milieu de AB centre de la courbe, l'angle AFB a ses bissectrices parallèle et perpendiculaire à AX et BY.

Premier cas : F entre AX et BY. — Posons

$$AB = \alpha, \quad \widehat{ABY} = \theta, \quad \widehat{XAF} = \widehat{YBF} = \alpha.$$

Fig. 1.



Dans le triangle FAB, on a

$$\widehat{F} = 2\alpha, \quad \widehat{A} = 2 \text{ droits} - (\alpha + \theta), \quad \widehat{B} = \theta - \alpha.$$

On a alors

$$\frac{\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{FA}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{FB}{\sin(\theta + \alpha)}$$

puis, comme

$$FA \cdot FB = k,$$

$$\frac{\alpha^2}{\sin^2 2\alpha} = \frac{k}{\sin(\theta - \alpha) \sin(\theta + \alpha)}$$

ou

$$\frac{\alpha^2}{1 - \cos^2 2\alpha} = \frac{2k}{\cos 2\alpha - \cos 2\theta},$$

et enfin, en posant

$$\cos 2\alpha = u, \\ f(u) = 2ku^2 + a^2u - (2k + a^2 \cos 2\theta) = 0.$$

On peut toujours supposer θ aigu, ce qui justifie les expressions des angles de FAB; en outre, il faut et il suffit que

$$\alpha \leq \theta \quad \text{ou} \quad 0 \leq 2\alpha \leq 2\theta,$$

c'est-à-dire

$$1 \geq \cos 2\alpha \geq \cos 2\theta.$$

(Or

$$f(1) = 2a^2 \sin^2 \theta, \quad f(\cos 2\theta) = -2k \sin^2 2\theta;$$

$f(u) = 0$ a donc toujours deux racines u_1 et u_2 , et, comme $2k > 0$, on a

$$u_1 < \cos 2\theta < u_2 < 1.$$

La plus petite racine est à rejeter, la plus grande est acceptable. Il y a donc toujours une ellipse et une seule répondant à la question.

Second cas : F en dehors de AX et BY. — Posons toujours

$$AB = a, \quad \widehat{FBY} = \alpha, \quad \widehat{ABY} = \theta,$$

en supposant θ aigu. Dans le triangle FAB, on a

$$\hat{B} = \alpha - \theta, \quad \hat{A} = \alpha + \theta, \quad F = 2 \text{ droits} - 2\alpha.$$

La bissectrice intérieure de AFB, perpendiculaire à AX et BY, montre que, A et B étant de part et d'autre de cette droite, on a

$$\alpha \geq \theta.$$

Comme, de plus, F doit exister, il faut que $\alpha \leq 1$ droit; α est, cette fois-ci, assujetti aux conditions

$$\theta \leq \alpha \leq 1 \text{ droit.}$$

Or, FAB donne

$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{FA}{\sin(\alpha - \theta)} = \frac{FB}{\sin(\alpha + \theta)},$$

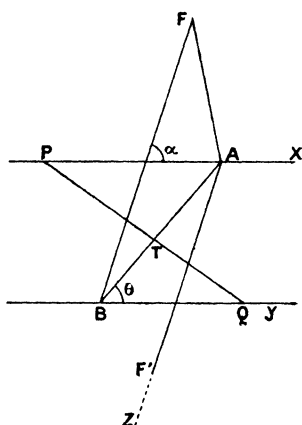
puis

$$\frac{a^2}{1 - \cos^2 2\alpha} = \frac{2k}{\cos 2\theta - \cos 2\alpha},$$

et enfin

$$f(u) = 2ku^2 - a^2u + a^2 \cos 2\theta - 2k = 0.$$

Fig. 2.



Comme on doit avoir

$$2\theta \leq 2\alpha \leq 2 \text{ droits},$$

il faut que

$$\cos 2\theta \geq \cos 2\alpha \geq -1,$$

$$f(\cos 2\theta) = -2k \sin^2 2\theta,$$

$$f(-1) = 2a^2 \cos^2 \theta.$$

Comme le premier coefficient est $2k > 0$, il y a deux racines, et l'on a

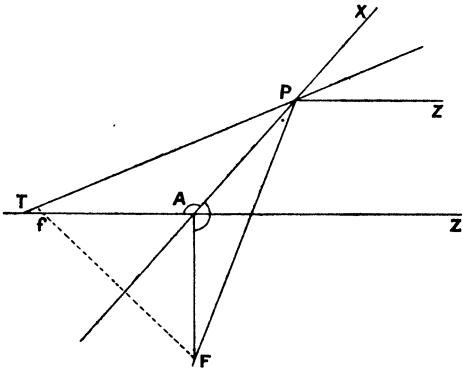
$$-1 < u_2 < \cos 2\theta < u_1.$$

Toujours u_1 est acceptable, et il y a toujours une hyperbole et une seule répondant à la question.

PROBLÈME II. — *Construire le foyer F d'une parabole tangente à une droite AX en un point A admettant une droite AZ comme direction d'axe et sachant que $AF = l$.*

Le symétrique f de F par rapport à AX est sur AZ, et, par suite, pour avoir F, on prend la droite symé-

Fig. 3.



trique de AZ par rapport à AX sur laquelle on porte $AF = l$, à partir de A du côté où l'on veut situer la parabole. Il y en a alors toujours une et une seule qui convient.

Ces deux problèmes résolus, je puis démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Une tangente mobile PQ à une ellipse ou une hyperbole détache sur deux tangentes parallèles fixes AX et BY à partir des points de contact A et B deux segments AP et BQ de produit constant.*

Réciproquement. — Si une droite mobile détache sur deux droites parallèles fixes AX et BY deux

segments AP et BQ de produit constant, cette droite enveloppe une ellipse ou une hyperbole tangente en A et B à AX et BY, suivant que AP et BQ sont de même sens ou de sens contraires.

Prenons une ellipse, par exemple, et démontrons que les triangles FAP, QBF sont semblables. Tout d'abord, on a

$$\widehat{FAP} = \widehat{QBF}.$$

Ensuite, en faisant intervenir le point de contact T de PQ qui est tel que, d'après le théorème de Poncelet, les angles AFM et BFM admettent FP et FQ pour bissectrices, on a

$$\begin{aligned} \widehat{FPA} &= 2 \text{ droits} - (\widehat{FAP} + \widehat{AFP}) \\ &= 2 \text{ droits} - \frac{\widehat{AFB} - \widehat{AFM}}{2} = \frac{\widehat{BFM}}{2} = \widehat{BFQ}. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Donc

$$\frac{FA}{BQ} = \frac{AP}{FB},$$

d'où

$$AP \cdot BQ = FA \cdot FB = \text{const.}$$

Démonstration tout à fait analogue pour l'hyperbole en remarquant que, au contraire de l'ellipse, AP et BQ sont de sens contraires.

Réciproque. — Supposons

$$AP \cdot BQ = k,$$

AP et BQ étant cette fois-ci de sens contraires pour changer.

J'ai montré qu'il y a toujours une hyperbole et une

seule tangente en A et B à AX et BY et telle que

$$FA \cdot FB = k.$$

Supposons-la construite et de P menons-lui la seconde tangente PQ'; on a, d'après la proposition directe,

$$AP \cdot BQ' = FA \cdot FB,$$

AP et BQ' étant de sens contraires; mais, par hypothèse,

$$AP \cdot BQ = FA \cdot FB,$$

AP et BQ étant de sens contraires; donc BQ et BQ' sont égaux et de même sens, Q' est en Q et PQ' sur PQ; autrement dit, PQ enveloppe l'hyperbole que je viens de construire.

Ce théorème ne pouvant avoir d'analogue pour la parabole, je vais le transformer en caractérisant, non plus PQ par une relation entre AP et BQ, mais par une relation entre AP, AT et BT, T étant le point où PQ va rencontrer AB. Nommons, en outre, φ le point où AB est rencontré par la parallèle à AX issue de F.

Je puis écrire

$$BQ = AP \frac{TB}{TA}, \quad FB = FA \frac{\varphi B}{\varphi A}.$$

Par suite,

$$AP : BQ = FA : FB$$

s'écrit

$$\overline{AP}^2 \frac{TB}{TA} = \overline{AF}^2 \frac{\varphi B}{\varphi A},$$

qui lui est toujours équivalente.

Imaginons que, AX et A restant fixes ainsi que F, F' s'éloigne indéfiniment sur la droite AF'Z; F'B restant égal et parallèle à AF, B s'éloigne indéfiniment dans la direction AZ, et AB tend à venir sur AZ; la courbe tend à devenir une parabole tangente en A

à AX, de direction d'axe AZ; AF φ tend à devenir isoscèle et, par suite, φA à devenir égal à AF; de plus, $\frac{\varphi B}{TB}$ tend évidemment vers 1 (il suffit de laisser T fixe, par exemple).

Notre relation, que j'écris

$$\frac{\overline{AP}^2}{AT} = \frac{\overline{AF}^2}{\varphi A} \frac{\varphi B}{TB},$$

devient donc, à la limite,

$$\frac{\overline{AP}^2}{AT} = AF.$$

Démontrons-la directement sur la parabole. Dans les triangles FAP et PAT, on a

$$\widehat{FAP} = \widehat{PAT},$$

à cause de la propriété de la tangente en A d'être bissectrice de \widehat{FAZ} ; puis

$$\widehat{FPA} = \widehat{MPZ},$$

d'après le théorème de Poncelet, ou

$$\widehat{FPA} = \widehat{PTA};$$

donc

$$\frac{AF}{AP} = \frac{AP}{AT} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AP}^2}{AT} = AF.$$

Donc :

THÉORÈME. — Si AX est une tangente fixe en un point A d'une parabole de direction d'axe AZ et P, T les points où une tangente mobile coupe AX et AZ, on a

$$\frac{\overline{AP}^2}{AT} = AF = \text{const.}$$

Réciproquement. — Si une droite TP détache sur deux droites fixes AX et AZ deux segments AT et AP liés par la relation

$$\frac{\overline{AP}^2}{AT} = l,$$

TP enveloppe une parabole de direction d'axe AZ, tangente en A à AX et située du côté opposé à T par rapport à AX.

En effet, j'ai vu qu'il y a une parabole et une seule tangente en A à AX de direction d'axe AZ, telle que

$$AF = l$$

et située par rapport à AX de côté opposé à T. A cette parabole de P menons la seconde tangente PT'; on a, d'après le théorème direct,

$$\frac{\overline{AP}^2}{AT'} = AF = l.$$

Donc

$$AT' = AT,$$

et, comme T et T' sont du même côté de AX, ils sont confondus. Ainsi donc TP enveloppe cette parabole.

Je suis maintenant en mesure de démontrer le théorème général suivant, qui fait l'objet de cette Note :

THÉORÈME. — *Un cône ou un cylindre à base elliptique, hyperbolique ou parabolique est coupé par tout plan sécant, non issu du sommet ou non parallèle aux génératrices, suivant une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

S'il s'agit d'un cône, la section est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le plan parallèle au plan sécant mené par le sommet ne coupe pas, coupe ou touche le cône.

S'il s'agit d'un cylindre, la section est de même nature que la base.

Si le plan sécant (R) est parallèle au plan de base (H), le fait est évident. Supposons donc que (R) coupe (H) suivant une droite UV :

1° La base étant une conique à centre, menons-lui les deux tangentes AX et BY parallèles à UV (1); une tangente mobile les coupe en P et Q de façon que

$$AP \cdot BQ = \text{const.}$$

S'il s'agit d'un cône de sommet S, tel que (R) ne soit parallèle à aucun des plans tangents SAX et SBY, ces deux plans coupent (R) suivant deux droites ax et by ; SP et SQ coupent (R) en p et q , et pq est la section de SPQ par le plan sécant; l'enveloppe de pq est évidemment la section plane que je veux déterminer, puisque la tangente à la section plane en un point M est l'intersection du plan tangent le long de SM avec le plan sécant.

Or, ax et by sont parallèles à AX et BY, et par suite

$$AP = ap \frac{SA}{Sa}, \quad BQ = bq \frac{SB}{Sb}.$$

Comme SAa et SBb sont fixes, de

$$AP \cdot BQ = \text{const.}$$

je déduis

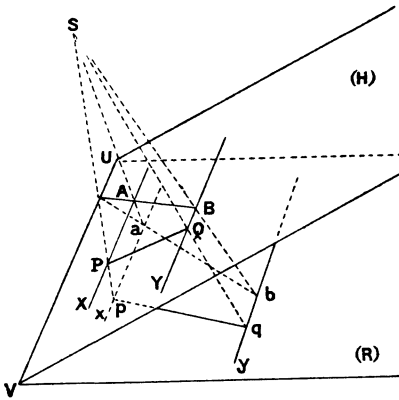
$$ap \cdot bq = \text{const.},$$

ce qui montre que pq enveloppe une ellipse ou une hyperbole tangente à ax et by en a et b .

(1) On montrera à la fin de la démonstration qu'on peut toujours se supposer dans le cas où ces tangentes existent.

Il est à remarquer que si a et b sont tous deux, par rapport à S , du même côté que A et B ou tous deux de côtés opposés, ap et bq sont tous deux de même sens que AP et BQ ou tous deux de sens contraires. La courbe (c) enveloppe de pq est alors de même nature que la courbe (C) enveloppe de PQ . Sinon l'une est

Fig. 4.



une ellipse et l'autre une hyperbole. Cela signifie visiblement que la section est une ellipse ou une hyperbole suivant que le plan parallèle au plan sécant (R), mené par S , est non sécant ou sécant au cône.

S'il s'agit d'un cylindre, il faut remplacer SA et SB tout simplement par deux parallèles aux génératrices AU et BU ; alors ap et bq sont égaux à AP et BQ et de même sens; le genre de la conique est conservé.

Supposons maintenant que, nous trouvant dans le cas du cône, l'une des droites SA ou SB , SB par exemple, est parallèle à (R); c'est le cas où (R) est parallèle au plan tangent SBY au cône.

La section cette fois-ci est une parabole :

Je marque T où PQ coupe ABZ et j'ai

$$\overline{AP}^2 \frac{TB}{TA} = \overline{AF}^2 \frac{\varphi B}{\varphi A}$$

ou

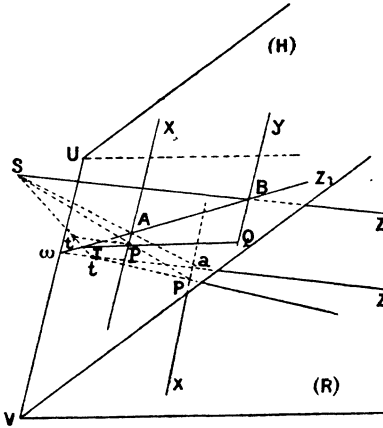
$$\overline{AP}^2 = l^2 \frac{TA}{TB}, \quad l^2 = \overline{AF}^2 \frac{\varphi B}{\varphi A}$$

étant une constante.

On a

$$AP = \frac{SA}{Sa} ap = \lambda ap, \quad \frac{TA}{TB} = \frac{t'A}{SB},$$

Fig. 5.



At étant parallèle à SB; mais

$$\frac{t'A}{ta} = \frac{SA}{Sa}, \quad t'A = \frac{SA}{Sa} at,$$

puis

$$\frac{TA}{TB} = \frac{SA}{SB \cdot Sa} at = \frac{1}{\mu} at.$$

Donc, finalement,

$$\lambda^2 \overline{ap}^2 = \frac{l^2}{\mu} at$$

ou

$$\overline{ap}^2 = k.at,$$

ce qui montre que tp enveloppe une parabole tangente en a à ax et de direction d'axe az .

C. Q. F. D.

2° Supposons enfin que la base soit dans le plan (R) une parabole (*fig.* 5). Je lui mène ax tangentielle-ment et parallèlement à uv , puis je trace aZ parallèle à l'axe; une tangente mobile à la parabole est caractérisée par ce fait que

$$\frac{\overline{ap}^2}{at} = k.$$

S'il s'agit d'un cône ayant cette parabole (c) pour base, je tire Sa puis SZ parallèle à aZ qui coupe le plan sécant (H) en A et B; je trace AX , BY parallèles à UQ puis AB ; la tangente tp donne le plan tangent Stp au cône qui coupe (H) suivant TPQ tangente à la section (C). Les mêmes calculs que tout à l'heure, mais faits en sens inverse, montrent que de $\overline{ap}^2 = k.at$ je tire

$$\overline{AP}^2 = t^2 \frac{TA}{TB}.$$

Je déduirais enfin de cette relation

$$AP.BQ = \text{const.}$$

Ceci montre que la section du cône à base parabolique (c) est une ellipse ou une hyperbole tangente à AX et BY en A et B. Il est visible que, pour que (C) soit une ellipse, c'est-à-dire que AP et BQ aient le même sens, il faut et il suffit que le plan mené par S parallèlement à (H) ne coupe pas le cône.

S'il s'agit d'un cylindre, SZ n'existe plus; Sa est

remplacé par la parallèle *au* aux génératrices; alors AP et *ap* sont égaux; en appelant ω le point où AT et *at* coupent UV, on a

$$AT = \frac{\omega A}{\omega a} at = m.at$$

et, par suite, on a

$$\frac{\overline{AP}^2}{AT} = mk,$$

ce qui prouve que AT enveloppe une parabole tangente en A à AX, sa direction d'axe AZ étant la trace du plan ZAU sur le plan sécant.

Le théorème est donc démontré dans tous les cas. Mais j'ai admis au début de ma démonstration qu'il était possible de mener à la base elliptique ou hyperbolique des tangentes parallèles à UV. Dans le cas de l'ellipse, cela est toujours possible; mais, dans le cas de l'hyperbole, il est nécessaire que UV ne la coupe pas en ses deux branches.

S'il en est ainsi, je changerai comme suit mon plan de base de façon à pouvoir appliquer ma démonstration :

Cas du cône. — Traçons une droite $U_1 V_1$ ne coupant pas l'hyperbole base du cône ou la coupant sur une seule branche; les tangentes parallèles à $U_1 V_1$ existant, ma démonstration montre que tout plan (H_1) passant par $U_1 V_1$ coupe le cône suivant une ellipse ou une hyperbole ou même une parabole; je puis toujours choisir (H_1) de façon que la section soit elliptique. La base du cône étant maintenant dans (H_1) une ellipse, ma démonstration s'applique à la section par le plan (R) .

Cas du cylindre. — UV coupant les deux branches

de l'hyperbole, soient I un des points d'intersection et la tangente U_1IV_1 ; le plan tangent au cylindre en I coupe (R) suivant U_2IV_2 . Soit (H_1) un point passant par U_2IV_2 et coupant la branche de l'hyperbole qui contient I en ce point et un autre point qu'il est inutile de désigner. Ma démonstration s'applique; (H_1) coupe le cylindre suivant une hyperbole. Prenons-la pour base; (R) coupe son plan suivant U_2IV_2 , et, comme il y a des tangentes à cette hyperbole parallèles à U_2V_2 (une est même U_2V_2), ma démonstration s'applique.

Remarque I. — J'aurais pu me dispenser dans ma démonstration de donner le genre de la courbe et me borner à démontrer que c'est une conique.

En effet, si M est un point de la base, il fournit dans la section un point m intersection de (R) avec SM . Ce point s'éloigne indéfiniment si SM devient parallèle à (R) .

Donc, suivant qu'il y a deux génératrices parallèles à (R) , une ou pas du tout, la section est une hyperbole, une parabole ou une ellipse.

Remarque II. — Dans le cas général, la tangente en m est l'intersection de (R) par le plan tangent le long de SM . Or, on démontre pour l'hyperbole qu'une asymptote est la position limite d'une tangente dont le point de contact m s'éloigne indéfiniment. Donc, les asymptotes de la section hyperbolique sont les sections par (R) des plans tangents au cône le long des génératrices qui sont parallèles à (R) .

Dans le cylindre hyperbolique, les plans parallèles aux génératrices et passant par les asymptotes de la base sont ce qu'on appelle les *plans asymptotes du cylindre*; ils contiennent les asymptotes de toutes les sections.

Quand il y a une seule génératrice du cône parallèle à (R), la section est une parabole d'axe évidemment parallèle à cette droite.

Ces deux faits sont utilisés dans tous les cours de Descriptive ou de Cotée pour la détermination des asymptotes de la projection de la section hyperbolique ou de sa tangente au sommet et de son axe, quand la section est parabolique.

Remarque III. — Le théorème aurait pu s'énoncer ainsi :

La perspective d'une conique est une conique. La projection parallèle d'une conique est une conique du même genre.

Remarque IV. — La relation $AP.BQ = \text{const.}$ sur laquelle repose la démonstration n'est autre chose que la forme la plus simple de la relation homographique qui a été ici démontrée élémentairement.