

M.-F. EGAN

Note sur les quadriques circonscrites à deux sphères

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 518-523

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__518_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

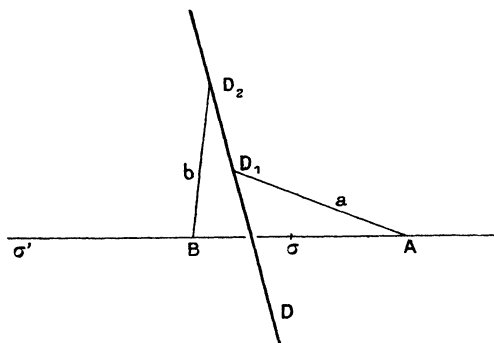
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L²21 c]NOTE SUR LES QUADRIQUES CIRCONSCRITES
A DEUX SPHÈRES;

PAR M. M.-F. EGAN.

M. Bricard a démontré ⁽¹⁾ que les plans tangents menés par une droite D , qui varie en touchant deux

Fig. 1.



sphères, à une quadrique Q circonscrite aux deux sphères, contiennent un angle θ qui est indépendant de la position de D , et que les plans bissecteurs de cet angle sont les plans qui passent par les centres de similitude des sphères.

Cet angle θ caractérise la quadrique Q , que l'on peut désigner, par conséquent, par $Q(\theta)$.

Ces quadriques jouissent aussi de la propriété suivante :

(¹) *Nouv. Ann.*, mars 1909.

L'angle des deux plans, issus d'une génératrice quelconque de $Q(\theta)$, qui passent par les centres des sphères, est égal à θ .

I. Pour le montrer, refaisons la démonstration du théorème de M. Bricard d'un autre point de vue. Soient A et B les centres des sphères, a et b leurs rayons, et soient

$$(1) \quad l^2 = a^2 J, \quad m^2 = b^2 J \quad (J = u^2 + v^2 + w^2)$$

les équations des sphères en coordonnées tangentielles.

Toute quadrique de révolution autour de AB a deux foyers (réels ou imaginaires) sur AB, dont les équations seront

$$el + fm = 0, \quad e'l + f'm = 0,$$

e, f, e', f' étant des constantes. L'équation de la quadrique sera donc

$$(el + fm)(e'l + f'm) = kJ.$$

Si la quadrique est circonscrite aux sphères a et b , il est facile de voir que son équation s'écrira

$$(2) \quad S(\theta) = \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - 2 \frac{lm}{ab} \cos \theta - J \sin^2 \theta = 0.$$

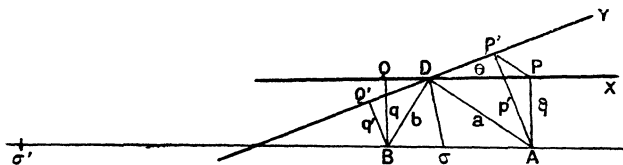
En effet, cette équation peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes

$$\begin{aligned} \left(\frac{l}{a} - \frac{m}{b} \cos \theta \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{m^2}{b^2} - J \right) &= 0, \\ \left(\frac{l}{a} \cos \theta - \frac{m}{b} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{l^2}{a^2} - J \right) &= 0. \end{aligned}$$

L'angle θ , nous allons le voir, est précisément l'angle dont il est question dans l'énoncé.

Soient p et q les longueurs des normales issues de A et B à un plan quelconque. L'équation (2) nous

Fig. 2.



apprend que, si ce plan touche la quadrique $S(\theta)$, on a

$$(3) \quad \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{2pq}{ab} \cos \theta = \sin^2 \theta.$$

Considérons une droite D qui touche les deux sphères. Soient D_1 et D_2 les points de contact de D , et σ , σ' les centres de similitude (*fig. 1*). Projétons la figure AD_1D_2B sur un plan perpendiculaire à D (*fig. 2*). D se réduit à un point, tout plan qui passe par D est représenté par une droite, et l'angle de deux de ces droites est égal à celui des plans correspondants. Les longueurs AD_1 , BD_2 ne sont pas changées; elles sont a et b , et les rapports $A\sigma : \sigma B$, $A\sigma' : \sigma' B$ restent égaux à $\pm a : b$. Donc $D\sigma$ et $D\sigma'$ sont les bissectrices dans la figure 2 ou les plans bissecteurs dans la figure 1 de l'angle ADB .

Menons deux plans DX et DY, faisant l'un et l'autre un angle $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ avec $D\sigma$. Si $(p, q), (p', q')$ appartiennent à DX et DY, on a facilement

$$\frac{p}{a} = \frac{q'}{b}, \quad \frac{p'}{a} = \frac{q}{b}.$$

On a aussi (puisque $\widehat{\text{PDP}}' = \widehat{\text{PAP}}' = \theta$)

$$p'^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta = PP'^2 = a^2 \sin^2 \theta.$$

Donc

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{p'^2}{a'^2} - 2 \frac{p}{a} \frac{p'}{a'} \cos \theta = \sin^2 \theta,$$

d'où, en substituant $\frac{q}{b}$ à $\frac{p'}{a'}$, on tire

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{2pq}{ab} \cos \theta = \sin^2 \theta.$$

On a de même

$$\frac{p'^2}{a'^2} + \frac{q'^2}{b'^2} - \frac{2p'q'}{a'b'} \cos \theta = \sin^2 \theta.$$

Donc, les plans DX et DY sont bien les plans tangents menés par D à la quadrique S(θ), et leur angle est θ .

II. Supposons maintenant que D soit une génératrice de S(α) ($\theta \neq \alpha$). On a toujours pour le plan DX

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{2pq}{ab} \cos \theta = \sin^2 \theta.$$

Or DX, comme tout plan qui passe par D, touche la quadrique S(α); on a donc

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{2pq}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha,$$

d'où, en soustrayant et divisant par $\cos \theta - \cos \alpha$, on tire

$$\cos \alpha + \cos \theta = \frac{2pq}{ab} = 2 \frac{AP}{AD} \frac{BQ}{BD} = 2 \sin \angle ADP \sin \angle BDQ.$$

Or,

$$\angle ADP + \angle BDQ = \pi - \angle ADB, \quad \angle BDQ - \angle ADP = \theta;$$

donc

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \theta &= \cos \theta + \cos \angle ADB, \\ \therefore \cos \angle ADB &= \cos \alpha. \end{aligned}$$

ADB est l'angle entre les plans DA, DB; cet angle est donc égal à α pour toutes les génératrices D de la quadrique $S(x)$. c. q. f. d.

Notons que l'angle des plans menés par D et passant par les centres A et B est égal à celui des plans tangents des sphères aux points de contact avec D.

III. Si l'on fait une transformation par polaires réciproques par rapport à une sphère quelconque, on déduit le théorème suivant :

Soient u et v deux coniques ayant un foyer commun F, et soient U et V les quadriques qu'engendrent u et v en tournant chacune autour de son axe. Une quadrique donnée Q, circonscrite à U et V, coupera une droite D, qui varie en touchant U et V, en deux points qui sous-tendront un angle constant θ en F. Les points de contact avec U et V d'une génératrice quelconque de Q sous-tendront en F un angle égal à θ . Les bissectrices de θ seront les vecteurs issus de F aux points de rencontre de D avec les deux plans d'intersection de U et V.

Dans le cas où u et v ont deux foyers communs F et F', il y aura deux angles constants θ et φ pour chaque quadrique Q. Ces deux angles se construisent facilement. Supposons que u et v soient respectivement une ellipse et une hyperbole. Donnons-nous la quadrique Q en nous donnant les vecteurs focaux r , r' à un point quelconque du cercle de contact de Q et V. Construisons un triangle ABC ayant

$$AB = r, \quad AC = r'$$

et BC égal au grand axe de u . Soit AD la bissectrice intérieure de l'angle ABC. Alors, B et C sont respec-

tivement θ et φ ; BD, DC sont égaux aux rayons vecteurs focaux d'un point du cercle de contact de U et Q; AD est égal au segment de la génératrice de Q terminé par ses points de contact avec U et V. Pour construire la quadrique Q, on fait tourner le triangle ADC autour de AD jusqu'à ce que la distance BC soit égale à FF'; alors on superpose B et C sur F et F', et l'on fait tourner le tétraèdre FAF'D autour de FF'; AD engendre la quadrique Q.

La démonstration se fait sans difficulté si l'on tient compte de l'égalité des angles qu'une droite tangente à une quadrique de révolution fait avec les deux vecteurs focaux passant par le point de contact.