

L. DESAINT

Théorèmes sur les limites

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 510-517

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__510_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__510_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D1a]

THÉORÈMES SUR LES LIMITES;

PAR M. L. DESAINT.

Voici quelques théorèmes dont les derniers n'ont pas encore été donnés, il me semble, et qui sont faciles à appliquer :

Si, à partir de $z = u_0$, la fonction

$$f(z)$$

est croissante,

$$\frac{f(z)}{z}$$

restant inférieur à 1 quand z augmente indéfiniment, la suite de nombres positifs

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n \quad (u_1 > u_0),$$

où deux termes consécutifs satisfont à

$$u_n = f(u_{n-1}),$$

tend vers une limite.

• Les quantités

$$u_0, u_1, \dots$$

croissent.

En effet, admettons

$$u_n > u_{n-1}$$

(511)

pour tous les indices

$$n = 1,$$

$$n = 2$$

jusqu'à n .

Il est facile de démontrer que

$$u_{n+1} > u_n.$$

A cause de la fonction $f(z)$ et de sa croissance,

$$f(u_n) > f(u_{n-1})$$

et

$$u_{n+1} > u_n.$$

Ensuite constatons que les u ne peuvent augmenter indéfiniment. Sans quoi,

$$\frac{f(u_n)}{u_n} \quad (n > N)$$

devenant inférieur à 1,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

qui lui est égal, devient inférieur à 1, ce qui est contraire à la première partie de la démonstration.

La limite λ des u est d'ailleurs racine de

$$x = f(x)$$

si la fonction $f(x)$ non seulement est croissante, mais est aussi continue.

On peut donner un énoncé plus large.

Si

$$u_0, \quad u_1, \quad \dots, \quad u_{n-1}, \quad \dots \quad (u_1 > u_0)$$

forment une suite de quantités admettant une loi de récurrence

$$\varphi(u_{n-1}) = f(u_n),$$

$f(z)$ et φ étant des fonctions croissantes à partir de

$z = u_0$, les ordres d'infinitude de $\varphi(z)$ et $f(z)$ étant différents, celui de $\varphi(z)$ étant plus grand que celui de $f(z)$ si z est l'infiniment grand principal, la suite des u_n tend vers une limite.

Je vais faire voir que, en supposant les termes u croissant jusqu'au terme u_{n-1} , on a encore

$$u_n > u_{n-1}.$$

Essayons l'hypothèse contradictoire

$$u_n < u_{n-1}.$$

Dans ces conditions

$$\varphi(u_{n-1}) = f(u_n) < [f(u_{n-1}) = \varphi(u_{n-2})],$$

d'après notre hypothèse de la croissance de la fonction $f(z)$.

Pareillement

$$\varphi(u_{n-1}) > \varphi(u_{n-2}),$$

à cause de la propriété de $\varphi(z)$.

Les deux inégalités qui précèdent se contredisent.

Les quantités u_n vont en croissant.

Il reste à montrer que les u restent finis.

Si u_n augmentait indéfiniment, alors

$$f(u_n) > f(u_{n-1}) = \lambda u_{n-1}^\alpha (1 + \varepsilon),$$

α étant l'ordre d'infinitude de $f(z)$, pour z infini.

Pareillement

$$\varphi(u_{n-1}) = \lambda' u_{n-1}^\beta (1 + \varepsilon_1).$$

Or

$$f(u_n) = \varphi(u_{n-1}),$$

d'où

$$\lambda' u_{n-1}^\beta (1 + \varepsilon_1) = \lambda u_{n-1}^\alpha (1 + \varepsilon) + \eta \quad (\eta > 0).$$

Or, l'ordre d'infinitude α est plus grand que β ; cette égalité deviendrait impossible pour u_{n-1} infini.

Il n'est pas difficile d'aller encore plus loin en remarquant au préalable que la limite précédente est solution de

$$f(x) = \varphi(x).$$

Étant donné un ensemble

$$u_0, u, u_1, \dots, u_n,$$

déterminé par la loi de récurrence

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}, \dots, u_{n-k}),$$

$f(x, y, z, \dots)$ étant une fonction croissante des variables $x, y, \dots$, quand celles-ci croissent simultanément, les inégalités

$$0 < u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_k$$

ayant lieu, et la fonction $f(x, y, z, \dots)$ donnant lieu à l'inégalité

$$\frac{f(z, z, z, \dots, z)}{z} < 1,$$

pour z infini, les quantités

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$$

tendent vers une limite.

Supposons que les quantités $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ aillent en croissant.

Les quantités qui suivent donneront lieu à

$$u_n > u_{n-1}.$$

Remplaçons u_n par

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-k}).$$

Pareillement

$$u_{n-1} = f(u_{n-2}, u_{n-3}, \dots, u_{n-k-1}).$$

Comme

$$\begin{aligned} u_{n-1} &> u_{n-2}, \\ u_{n-2} &> u_{n-3}, \\ &\dots\dots\dots, \\ u_{n-k} &> u_{n-k-1}, \end{aligned}$$

on en déduit

$$u_n > u_{n-1},$$

à cause de la croissance de la fonction $f(x, y, z, \dots)$.

Il nous reste à montrer que les quantités u_n restent finies.

Envisageons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-k+1})}{u_n} < \frac{f(u_n, u_n, u_n)}{u_n},$$

à cause de la croissance de $f(x, y, \dots)$.

Comme pour z infini

$$\frac{f(z, z, \dots)}{z} < 1,$$

il n'est pas admissible que u_{n-1} augmente au delà de toute limite, car nous savons que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

à cause de la croissance des u .

Nous allons envisager le cas où deux suites

$$\begin{aligned} u_0, \quad u_1, \quad \dots, \quad u_n, \\ v_0, \quad v_1, \quad \dots, \quad v_k \end{aligned}$$

se présenteraient assujetties aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} u_n &= f_1(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-k}, v_{n-1}, \dots, v_{n-k'}), \\ v_n &= f_2(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, v_{n-1}, v_{n-k'}), \end{aligned}$$

en supposant les fonctions $f_1(x, y, \dots, x', y', \dots)$

(515)

et f_2 croissantes, et de plus

$$\begin{aligned} 0 < u_0 < \dots < u_k, \\ 0 < v_0 < \dots < v_k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{f_1(z, z, \dots, z', z')}{z} &< 1, \\ \frac{f_2(z, z, \dots, z', z')}{z'} &< 1, \end{aligned}$$

pour z et z' infiniment grands positifs. Dans ce cas

$$\begin{aligned} u_0, \quad u_1, \quad \dots, \quad u_n, \\ v_0, \quad v_1, \quad \dots, \quad v_n \end{aligned}$$

tendent vers une limite.

Montrons que les u et les v croissent.

Supposons que ce soit vrai depuis u_0 jusqu'à u_{n-1} ,
depuis v_0 jusqu'à v_{n-1} .

Je vais montrer que

$$\begin{aligned} u_n &> u_{n-1}, \\ v_n &> v_{n-1}. \end{aligned}$$

Envisageons

$$\begin{aligned} u_n &= f(u_{n-1}, \dots, v_{n-1}), \\ u_{n-1} &= f(u_{n-2}, \dots, v_{n-2}), \end{aligned}$$

à cause de la croissance de la fonction f ,

$$f(u_{n-1}, \dots, v_{n-1}, \dots) \geq f(u_{n-2}, \dots, v_{n-2}, \dots),$$

car

$$\begin{aligned} u_{n-2} &< u_{n-1}, \\ v_{n-2} &< v_{n-1}, \quad \dots \end{aligned}$$

Ces quantités restent finies.

Pour le voir, envisageons

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n-1}} &= \frac{f_1(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots)}{u_{n-1}} \\ &< \frac{f_1(u_{n-1}, u_{n-1}, \dots, v_{n-1}, v_{n-1}, \dots)}{u_{n-1}}, \end{aligned}$$

à cause de la croissance des v et des u avec l'indice et de la croissance de la fonction $f_1(x, y, \dots, x', \dots)$.

Comme

$$\frac{f_1(z, \dots, z', z', \dots)}{z}$$

reste inférieur à 1 quand z, z' sont infiniment grands positifs, il est impossible que les v_{n-1} et u_{n-1} augmentent indéfiniment; l'inégalité précédente

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{f_1(u_{n-1}, u_{n-1}, \dots, v_{n-1}, v_{n-1}, \dots)}{u_{n-1}},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < \frac{f_1(z, z, \dots, z', z', \dots)}{z},$$

z', z augmentant au delà de toute limite, demanderait que u_n devînt plus petit que u_{n-1} ; la croissance de u_n avec l'indice empêche une semblable conclusion.

Un semblable raisonnement ferait voir que les v restant finis de même tendent vers une limite.

Nous sommes, pour justifier l'existence de la proposition précédente, tenus de montrer que les conditions de l'énoncé peuvent être réalisées.

Ainsi

$$u_n = \sqrt{u_{n-1} - \frac{1}{v_{n-1} + 1} + 2},$$

$$v_n = \sqrt{v_{n-1} - \frac{1}{u_{n-1} + 1} + 2},$$

en faisant

$$v_0 = u_0 = 0,$$

entraînent

$$u_1 = v_1 = 1 > u_0, v_0.$$

Les fonctions

$$\sqrt{z - \frac{1}{z' + 1} + 2} \quad \text{et} \quad \sqrt{z' - \frac{1}{z + 1} + 2}$$

croissent avec z et z' .

Ensuite

$$\frac{\sqrt{z - \frac{1}{z' + 1} + 2}}{z} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{z' - \frac{1}{z + 1} + 2}}{z'}$$

tendent vers zéro, quand z' et z augmentent indéfiniment, par suite restent inférieurs à 1 dès que z' et z augmentent infiniment.

Pour appliquer les résultats précédents, il sera nécessaire souvent de préparer l'étude par la recherche des relations pouvant lier des u d'indices différents.

Prenons

$$u_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3} \dots}}$$

Il est facile de constater que

$$u_n = \sqrt{3 + u_{n-1}}.$$

Ici

$$u_0 = \sqrt{3},$$

$$u_1 = \sqrt{3 + \sqrt{3}} > u_0;$$

de plus,

$$f(z) = \sqrt{3 + z}$$

est croissante avec z et

$$\frac{\sqrt{3 + z}}{z} < 1,$$

à partir de z suffisamment grand, car

$$\frac{\sqrt{3 + z}}{z} \rightarrow 0,$$

pour z infini.

Par suite, les u tendent vers une limite.
