

CH. MÉRAY

**Sur les lignes brisées et les aires polygonales
dans le plan, à propos de la décomposition
d'un polygone en triangles**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 481-510

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__481_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'9a]

**SUR LES LIGNES BRISÉES ET LES AIRES POLYGONALES
DANS LE PLAN, A PROPOS DE LA DÉCOMPOSITION D'UN
POLYGONE EN TRIANGLES;**

PAR M. CH. MÉRAY.

§ I. — LIGNES BRISÉES PLANES, EN GÉNÉRAL.

1. En Géométrie plane, la théorie des aires à contours courbes dérive (par la méthode des limites) de celle des aires polygonales, et, dans cette dernière, la doctrine traditionnelle tire la mesure de tous les polygones de celle des rectangles, par l'intermédiaire des parallélogrammes, puis des triangles, sans partir d'une définition catégorique, sans produire le moindre argument à l'appui du fait essentiel, que *toute aire polygonale est décomposable additivement en celles de triangles dont le nombre est limité.*

Mes *Nouveaux Éléments de Géométrie* (éditions de 1903, de 1906) ont procédé autrement : on y trouve une définition précise des aires triangulaires, qui conduit à celle des aires polygonales quelconques, et tout est ramené à la comparaison numérique des premières, opérée directement. Pour faire de celles-ci les segments primordiaux du plan indéfini considéré comme champ aréolaire, pour transporter ainsi au triangle le rôle fondamental que les habitudes classiques avaient toujours conféré au rectangle, j'ai eu des motifs dont la validité demeure entière à mes yeux : d'abord, l'intervention forcée, dans la matière, du principe rappelé à

l'instant, intervention affirmant déjà, par cette nécessité d'ôter presque immédiatement le pas au rectangle pour le donner au triangle, la simplicité relative du dernier et son irréductibilité; ensuite, la facilité majeure du maniement des aires triangulaires, résultant de ce qu'un triangle reste encore un triangle après un déplacement arbitraire d'un sommet, tandis qu'il n'en est pas ainsi pour un rectangle; etc.

Ce tour d'idées renforce le relief du principe en question et rend plus désirable la substitution d'une démonstration en règle aux menues constatations empiriques qui ont été son seul fondement jusqu'ici. Par discrétion dans l'emploi de considérations d'un genre inaccoutumé, dont l'utilité a été parfois contestée, j'ai restreint dans mon Ouvrage cité, puis supprimé celle que je possédais alors. Une meilleure que je viens d'apercevoir pourra intéresser ceux qui ne refusent pas leur attention à l'approfondissement des choses mathématiques. On ne se récriera pas sur sa longueur, si l'on en détache ses préliminaires, en remarquant que leur portée ne s'arrête pas à l'appui qu'elle y trouve.

Effectivement, ces diverses considérations paraissent donner, à la conception des lignes brisées planes et figures connexes, une précision et une netteté qui lui manquaient. Si elles n'ajoutent presque rien à la visibilité de faits devenus quasi intuitifs à force d'avoir été aperçus empiriquement et retrouvés en jeu dans les applications les plus vulgaires de la Géométrie, elles les coordonnent et les expliquent.

Enfin, elles apportent une justification de plus aux choix des postulats *généraux* très simples qui m'ont permis d'enchaîner étroitement et uniformément tous les faits en Géométrie *de position*, faits innombrables et pourtant demeurés jusqu'à eux sans autre base,

chacun, que des suggestions *d'aventure*, reçues de *quelque dessin* par les yeux *du corps*.

Des élargissements appropriés les étendent naturellement aux faits similaires de l'espace; mais je n'irai pas au delà de cette allusion.

2. Il est utile de revenir un instant sur quelques généralités.

I. Nos spéculations rouleront exclusivement sur des droites et des lignes brisées (217* *et suiv.*) (1), toutes dans un même plan commun, les dernières continues (109*), sans côtés nuls, déchevêtrées et composant trois variétés à distinguer :

1° *Lignes ouvertes, terminées*, dites *chemins* (brisés ou polygonaux). Les côtés d'une telle ligne sont en nombre limité x ; en outre, elle se termine à *deux extrémités* dont chacune est le bout d'un côté *extrême*, par lequel celui-ci n'est soudé à aucun contigu. Quand $x > 1$, il y a $x - 1$ points de soudure de deux côtés contigus, qui sont les *sommets* proprement dits de la ligne (*cf.* III, *inf.*). Quand $x = 1$, elle se réduit à un simple segment rectiligne et ne présente aucun sommet.

Presque toujours, les extrémités sont distinctes. Mais leur confusion accidentelle ne modifie pas la nature de la ligne, pourvu qu'on ne la conçoive pas comme ci-après (3°, *inf.*), c'est-à-dire qu'on rompe par la pensée la soudure existant en fait entre les côtés extrêmes, et qu'on fasse abstraction du nouveau sommet qui interviendrait autrement.

(1) Un astérisque marquera les renvois faits à mon Ouvrage nommé tout à l'heure, 3^e édition, 1906; deux parfois viseront la précédente, de 1903.

2° *Lignes ouvertes, interminées dans les deux sens.* — Dans cette sorte, tout côté de la ligne est soudé par ses bouts à deux autres contigus, ceci rendant infinis le nombre des côtés, celui des sommets, et faisant disparaître les extrémités. En outre, nous supposerons expressément, que *la ligne présente, en nombre toujours limité, des côtés dont chacun contiendrait quelque point du périmètre ou de l'aire d'un triangle donné quelconque* (277*, I).

Cette restriction est remplie d'elle-même pour un chemin (1°) et pour un contour (3°, *inf.*).

3° *Lignes fermées, ou contours* (polygonaux), ou *polygones.* — Cette variété rentre dans la première (1°), mais avec les particularités essentielles, que les extrémités de la ligne se confondent, que leur fusion est considérée, non comme une double extrémité, mais comme un $x^{\text{ième}}$ sommet sans distinction avec les autres, et que, dans un sens quelconque, un point mobile peut la décrire indéfiniment sans buter à une extrémité (217*).

En dédoublant alors par la pensée un point quelconque de la ligne, on en fait un chemin ayant pour extrémités le point choisi et son dédoublement (1°, *in fine*).

Les diverses conditions restrictives posées dans cet alinéa sont absolues, et seront habituellement entendues.

II. Dans chacune de nos lignes, nous ne considérerons que des angles *topographiques*, c'est-à-dire inférieurs au replet (137*, II), et leur déchevêtrement essentiel en exclut les angles nuls, n'y laisse en conséquence que des angles saillants, rentrants ou neutres (134*).

Les deux qui lui sont attribuables en un même sommet sont adjacents extérieurement par leurs deux côtés à la fois [replémentaires en conséquence (137*, III)], et nous caractériserons cette disposition mutuelle en les disant *biadjacents*.

III. Dans une ligne brisée quelconque ...JKLMN..., quand un angle L' de sommet L est neutre, son biadjacent L'' (II) l'est aussi, les côtés $[LK]$, $[LM]$ de la ligne, qui font partie de ceux de ces angles, se prolongent mutuellement, leur assemblage KLM est un simple segment rectiligne $[KM]$, et la ligne ...JKMN... a, de moins que la proposée, un sommet, deux angles et un côté, tout en lui étant graphiquement identique. C'est dans ce sens que, dans celle-ci, on peut *supprimer* un tel sommet, de tels angles; *fusionner* une telle paire de côtés; dire de tels objets *facultatifs*; les qualifier, par opposition, d'*essentiels* quand ils ne sont pas facultatifs.

Inversement, tout point marqué à l'intérieur d'un côté d'une ligne brisée peut en être regardé comme un sommet additionnel, l'enrichissant de deux angles biadjacents neutres, dédoublant le côté considéré en deux autres; et tous ces nouveaux objets peuvent être dits *facultatifs* encore.

Arbitrairement donc, on pourra ainsi multiplier les angles et côtés, réduire les longueurs de ceux-ci, la ligne ne fût-elle qu'un simple segment rectiligne, transformer une droite tout entière en une ligne brisée [interminée (I, 2°)].

3. Des définitions spéciales sont ensuite à poser.

I. 1° Quand un angle non nul a été *piqueté*, c'est-à-

dire précisé dans sa conception, par le choix de son *premier* côté OA et de son *deuxième* OB, et que, par des demi-droites $\overline{OM'}$, $\overline{OM''}$, ..., $\overline{OM^{(k)}}$ rayonnant de son sommet, il a été divisé en parties *saillantes* AOM', M'OM'', ..., M^(k)OB, dont chacune est contiguë extérieurement à la précédente (ou à la suivante) par leur côté commun, ces derniers piquetages rendent tous ces angles partiels visiblement homotaxiques deux à deux, puis à l'angle originaire piqueté AOB quand il est saillant (178**).

2° Cette observation fournit, aux définitions du lieu cité, un complément alors omis parce qu'il n'y était pas utile : piquetés $A_1O_1B_1$, $A_2O_2B_2$, deux angles quelconques (chacun saillant, rentrant, neutre, même supérieur au replet) sont *homotaxiques*, s'il en est ainsi pour deux parties saillantes de l'un et de l'autre, piquetées comme il vient d'être dit (1°); dans le cas contraire, ils sont *antitaxiques*.

D'après cela, on constatera bien facilement qu'il y a toujours antitaxie entre deux angles quelconques, quand ils sont biadjacents (2, II) et pourvus de piquetages identiques, AOB par exemple pour l'un, et AOB encore pour son complémentaire.

II. 1° Dans une même ligne $\mathcal{L}$, supposée d'abord ouverte (2, I, 1°), considérons deux angles de sommets quelconques O, U, ses côtés [OM], [ON] se soudant en O, et [US], [UT] soudés en U; attribuons ensuite à ces angles des piquetages MON, SUT, déterminés par la condition, visiblement licite et étroite, que sur deux côtés homologues, $\overline{OM}$, $\overline{US}$ pour fixer les idées, les côtés [OM], [US] de la ligne soient toujours parcourus, l'un et l'autre, soit dans les sens indiqués par ces notations, soit dans les sens simultanément opposés,

par un point mobile décrivant la ligne dans tout sens constant donné (217*). Selon que de tels piquetages auront fait naître l'homotaxie ou l'antitaxie entre ces angles ($1, 2^\circ$), nous dirons que, sur la ligne, ils sont *enchaînés* dans le premier cas, *déchaînés* dans le second (¹).

Comme, en un sommet quelconque U, les deux angles de la ligne sont toujours antitaxiques (sous un même piquetage) (*Ibid.*), l'un d'eux, d'après ce qui vient d'être dit, sera toujours enchaîné, l'autre déchaîné à un même angle donné en tout sommet O, distinct ou non de U. Des angles en des sommets, essentiels ou facultatifs, (2, III), à prendre en considération pour l'étude de la ligne, on formera donc, cela sans omission, ni ambiguïté, ni répétition, deux groupes distincts, en plaçant : dans l'un, un angle quelconque donné O_1 et tous ses enchaînés $U_1, I_1, \dots$, dans l'autre, tous les déchaînés, $O_2, U_2, I_2, \dots$, du même angle O_1 , à commencer par son biadjacent O_2 . Nous nommerons ces groupes les deux *chaînes* des angles de la ligne.

On aperçoit immédiatement : *que, dans chaque chaîne, les angles sont respectivement les biadjacents de ceux de mêmes sommets dans l'autre chaîne, partant en nombre égal; qu'un angle quelconque est enchaîné à chacun de ceux de sa chaîne, mais déchaîné à chacun de ceux de l'autre chaîne; qu'entre deux angles donnés, il y a toujours enchaînement*

(¹) L'identité ou opposition des directions giratoires des angles ainsi piquetés fournirait un criterium équivalent, qui pourrait sembler plus simple; mais il serait sans prise sur les angles solides d'une surface polyédrique, parce que la génération de leurs intérieurs par rotation *proprement dite* n'existe pas pour ces derniers. C'est pourquoi j'ai préféré des considérations qui, elles, sont extensibles à l'espace, moyennant certaines modifications naturelles dont l'indication, toutefois, sortirait du cadre de ce travail.

ou déchaînement, selon que les relations de ce genre entre chacun d'eux et un même autre sont homonymes ou hétéronymes.

2° Semblable construction pour les chaînes d'une ligne interminée (2, I, 2°), sauf à la réduire à un chemin contenant les sommets de tous les angles impliqués dans la question.

Si la ligne ζ est fermée* (*Ibid.*, 3°), on en forme les deux chaînes comme ci-dessus (1°), après l'avoir transformée en un chemin, par son ouverture opérée en un quelconque de ses points, autre que ses sommets pris en considération.

3° Quand deux angles de notre ligne, O_x, O_y , sont neutres, avec des sommets O, U , tous deux intérieurs à un même côté $[MN]$ de celle-ci, les demi-plans d'arête commune MN , qui constituent leurs intérieurs, sont identiques s'il y a enchaînement entre ces angles, opposés s'il y a déchaînement.

Soient O_1, U_1 ces deux angles supposés d'abord enchaînés, puis $\overline{Oo}, \overline{Uu}$ des demi-droites rayonnant arbitrairement de leurs sommets dans leurs intérieurs. Comme, sous les piquetages MON, MUN , ces angles sont visiblement homotaxiques (1°), il en est de même pour leurs parties MOo, MUu (I, 2°). Les seconds côtés de celles-ci, $\overline{Oo}, \overline{Uu}$, tombent donc dans un même demi-plan d'arête MN , parce qu'elles sont saillantes et que leurs premiers côtés, $\overline{OM}, \overline{UM}$, sont appliqués sur l'arête dans des directions identiques (178**). Avec ce demi-plan, se confondent donc les intérieurs des angles O_1, U_1 .

S'il s'agit de deux angles déchaînés O_1, U_2 , le demi-plan de U_2 , opposé à celui de U_1 son biadjacent déchaîné, l'est par là à celui de O_1 identique à celui de U_1 comme nous venons de le constater,

III. Une notion liée étroitement à la précédente (II) interviendra fréquemment dans nos spéculations.

Quand une demi-droite issue d'un point quelconque M d'une ligne n'est pas appliquée sur un côté aboutissant à ce point, elle est intérieure à quelqu'un, M_x , des angles de la ligne en M (133*, II), et, combinée avec le déchevêtrement de celle-ci, la restriction générale du n° 2, I, 2°, assure la possibilité de la limiter à un vecteur $[Mm]$ assez petit pour n'avoir que son origine M sur la ligne. Il nous sera très commode de nommer un tel vecteur un *cil* de la ligne, *intérieur* à l'angle M_x , ayant M pour *pied*, m pour *pointe*; de dire encore que deux cils sont *enchaînés* ou *déchaînés* en même temps que les angles auxquels ils sont intérieurs (II, 1°, 2°).

IV. 1° Désignant par $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$ deux lignes brisées non identiques, de variétés quelconques (2, I), puis par $\mathfrak{A}$ une troisième ouverte, terminée, et ne contenant aucune de leurs extrémités (s'il en existe pour l'une ou l'autre), nous dirons que $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$ *s'abordent en* $\mathfrak{A}$, quand cette dernière se trouve être une partie commune aux deux premières. Dans ces conditions, l'étendue de l'abord $\mathfrak{A}$ ne peut atteindre la totalité, ni de $\mathcal{L}'$, ni de $\mathcal{L}''$, et ses extrémités, s'il ne se réduit à un point, ne sont jamais confondues, puisque leur confusion serait un enchevêtrement pour ces deux lignes.

Mêmes dénominations, si cette partie commune n'était qu'un simple point $\mathfrak{A}$, *non extrême pour* $\mathcal{L}'$, *ni pour* $\mathcal{L}''$; nous la regarderions comme un segment nul, ayant pour extrémités deux dédoublements de $\mathfrak{A}$.

On remarquera qu'un abord entre une ligne brisée et une droite [considérée comme telle (2, III)] ne peut consister qu'en un simple point (ce qui est le plus fréquent), ou bien en la totalité d'un côté (essentiel).

2° Dans le premier des deux cas ci-dessus (1°), nous donnerons à l'abord à la notation plus explicite $CD \dots EF$, et la restriction complémentaire de notre définition fait, de ses extrémités C, F , deux sommets (non extrêmes), facultatifs au besoin (2, III), tant de $\mathcal{L}'$ que de $\mathcal{L}''$. A cause de cela, ces lignes prolongeront d'abord $CD \dots EF$: au delà de C , par deux côtés $[CB']$, $[CB'']$ respectivement, dont les directions sont nécessairement différentes (sans parler de ceux pouvant exister au delà d'eux dans chacune), puis, au delà de F , par deux côtés $[FG']$, $[FG'']$ en pareille disposition mutuelle. Il y a donc en C, F : appartenant à $\mathcal{L}'$, des angles γ', φ' auxquels les demi-droites $\overline{CB''}$, $\overline{FG''}$ sont respectivement intérieures, et, appartenant à $\mathcal{L}''$, des angles γ'', φ'' auxquels les demi-droites $\overline{CB'}$, $\overline{FG'}$ le sont pareillement.

Dans le second cas, rien n'existe, de l'abord $CD \dots EF$, que les extrémités C, F confondues en un seul point $\{CF\}$ commun à nos deux lignes, à titre de sommet (non extrême, éventuellement facultatif). De cette fusion partent des côtés $[CB']$, $[FG']$ de $\mathcal{L}'$ et $[CB'']$, $[FG'']$ de $\mathcal{L}''$, sans identité encore entre les directions, tant de $[CB']$, $[CB'']$ que de $[FG']$, $[FG'']$; et les demi-droites $\overline{CB''}$, $\overline{FG''}$ sont respectivement intérieures à des angles γ', φ' , de sommet $\{CF\}$ dans $\mathcal{L}'$, convenablement choisis, ainsi que les demi-droites $\overline{CB'}$, $\overline{FG'}$ à certains angles γ'', φ'' de même sommet dans $\mathcal{L}''$.

Cela posé : *Il y a toujours homonymie entre la relation des angles γ', φ' et celle de γ'', φ'' (II).*

Pour les angles

$$\begin{array}{cc} \gamma', & \varphi', \\ \gamma'', & \varphi'' \end{array}$$

du premier des cas distingués à l'instant, leurs pique-

tages, semblablement placés dans le Tableau

$$(1) \quad \begin{cases} B'CD, & G'FE, \\ B''CD, & G''FE, \end{cases}$$

impose visiblement l'antitaxie à ceux de chaque même file verticale, parce que chaque angle y a toujours son premier côté intérieur à l'autre.

Si donc, dans une file horizontale de (1), les angles sont enchaînés (sur leur ligne), il y a encore antitaxie visible entre eux (*Ibid.*); d'où l'antitaxie de leurs antitaxiques dans l'autre file horizontale (178**, II), c'est-à-dire l'enchaînement aussi de ces derniers (II) (sur l'autre ligne, à laquelle ils appartiennent). Et semblablement, s'il s'agissait de déchaînement dans une file horizontale.

Même raisonnement dans le second cas, à cela près que les notations (1) doivent être remplacées par

$$\begin{aligned} B'\}CF\{G', & \quad G'\}CF\{B', \\ B''\}CF\{G'', & \quad G''\}CF\{B'', \end{aligned}$$

et que, dans chaque file horizontale, l'enchaînement des angles consiste en leur identité, leur déchaînement en leur biadjacence.

Pour formuler commodément la nature de la relation, toujours commune ainsi, entre γ' , φ' et γ'' , φ'' simultanément, nous dirons qu'en leur abord $\mathfrak{A}$, les lignes considérées $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$ ont un *frôlement* si cette relation est l'enchaînement, une *traversée* si elle est le déchaînement.

3° Au sous-alinéa (2°), nous avons désigné par $[CB']$, $[FG']$ les côtés de $\mathfrak{L}'$ qui prolongent l'abord $\mathfrak{A}$ immédiatement au delà de ses extrémités C, F. En les réduisant à des longueurs $[Cb']$, $[Fg']$ assez petites pour en faire des cils de l'autre ligne (III), on obtient

ce que nous aurons à considérer sous la dénomination d'*amorces* de l'abord $\mathfrak{A}$ sur la ligne $\mathfrak{L}'$. Définition semblable pour les amorces du même abord sur $\mathfrak{L}''$.

D'après cela, *les amorces d'un abord sur chaque ligne sont enchaînées pour un frôlement, déchaînées pour une traversée (Ibid.), (2°).*

4. Un contour triangulaire $\mathfrak{C}(2, I, 3^0)$, de sommets α , β , γ , étant donné, nous aurons à considérer la région $\{\mathfrak{C}\}$ constituée par l'aire du triangle $\alpha\beta\gamma$ (277*, I), abstraction faite des points de ses côtés, et la région $\{\mathfrak{C}\}_\infty$ laissée dans le plan de nos tracés par l'ablation de la région $\{\mathfrak{C}\}$ et des points du contour. Nous les nommerons respectivement l'*internat* et l'*externat* du contour ⁽¹⁾ (cf. 7, VI, *inf.*).

A ce propos, nous rappellerons qu'ainsi l'*internat* est la région commune aux trois demi-plans $\overline{\beta\alpha\gamma}$, $\overline{\gamma\alpha\beta}$, $\overline{\alpha\beta\gamma}$ après ablation des segments $[\beta\gamma]$, $[\gamma\alpha]$, $[\alpha\beta]$, et nous observerons que chaque point de l'*externat* est

(¹) La distinction faite ainsi entre les points du périmètre d'un triangle, les autres points de son aire et ceux du surplus du plan (étrangers à ces deux ensembles) est nécessaire ici, comme on le verra dans un instant, et de semblables se présenteront plus loin. En l'élargissant ailleurs, on ajouterait beaucoup de précision et de clarté au langage, dans toutes les circonstances analogues, celles, veux-je dire, où interviennent des régions continues de lignes, de surfaces, de l'espace, avec les points, lignes et surfaces qui déterminent ces régions. Etant considérés, par exemple, deux points distincts sur une droite, il est parfois très gênant de manquer de mots pour distinguer, d'eux ceux *non extrêmes* qui appartiennent, soit au segment limite par eux, soit aux deux prolongements de celui-ci. Pour sortir de cet embarras, il suffirait d'appliquer les mots *internat* et *externat* à la région des premiers points et à l'ensemble (discontinu) de celles des derniers. Et de même, pour une demi-droite, un demi-plan, une bande, un angle plan (saillant ou rentrant), etc., un demi-espace, un trièdre, etc. Mais ici je dépasserais les bornes, en allant au delà de l'indispensable.

caractérisé par la propriété d'être intérieur à l'un au moins des opposés aux demi-plans précités.

Nous dirons encore que deux points étrangers au contour sont placés, relativement à lui, *d'un même côté*, quand, simultanément, ils appartiennent, soit à son internat, soit à son externat, mais *de part et d'autre*, quand l'un d'eux est afférent à l'internat, l'autre à l'externat.

Cela posé, nous établirons un lemme qui nous sera indispensable :

Étant considéré un chemin $\mathfrak{C}$ (2, I, 1°) dont les extrémités O, U sont étrangères au contour $\mathfrak{C}$, si le nombre θ des traversées des deux lignes (3, IV) est pair (0 compris), O, U sont d'un même côté de contour; s'il est impair, ils sont de part et d'autre. Et réciproquement (cf. 5, inf.).

I. 1° Dans le contour $\mathfrak{C}$, nous dirons *internes* les angles essentiels saillants α_1, β_1, c_1 en α, β, c , puis tout angle facultatif, partant neutre, α_1 , contenant le sommet essentiel qui est étranger au côté (essentiel encore) dont son sommet α est un point intérieur; nous dirons *externes* les biadjacents $\alpha_2, \beta_2, c_2, \dots \alpha_2, \dots$ des internes précités, les trois premiers rentrants, les autres tous neutres.

2° *De tous ces angles, deux quelconques sont enchaînés, quand, simultanément, ils sont internes ou externes, mais déchaînés, quand l'un est interne, l'autre externe (cf. 7, VI, inf.).*

Piquetés $\alpha\beta c, \alpha c\beta$, deux angles internes essentiels β_1, c_1 sont antitaxiques, parce que leurs seconds côtés $\bar{\beta}c, \bar{c}\beta$ ont des directions opposées sur une même droite βc , d'un seul côté de laquelle leurs autres côtés $\bar{\beta}\alpha, \bar{c}\alpha$ sont

placés (178**, IV). Piquetés abc , bca , ils sont donc homotaxiques (*Ibid.*, III), c'est-à-dire enchaînés (3, II); et de même, pour c_1 , a_1 , pour a_1 , b_1 .

Si $[bc]$, pour fixer les idées, est le côté essentiel du contour, auquel est intérieur le sommet c d'un angle interne facultatif c_1 , le piquetage bca rend celui-ci homotaxique à sa partie bca , antitaxique par suite à acb . Or, dans le triangle abc (comme dans le triangle abc tout à l'heure), les angles abc , acb sont antitaxiques. Donc bca , antitaxique à acb qui l'est à abc , est homotaxique à abc s'écrivant abc tout aussi bien. On en conclut l'enchaînement de ces angles notés c_1 , b_1 au début, puis de tout angle interne facultatif à tout angle interne essentiel, finalement, celui de deux angles quelconques de la première sorte (*Ibid.*).

Un angle externe quelconque est déchaîné aux internes, parce qu'il est tel relativement à son biadjacent qui est interne, partant à tous les autres. Et il est ainsi enchaîné à tout externe (*Ibid.*),

D'après cela, *les chaînes d'angles de notre contour triangulaire sont composées, l'une des internes, l'autre des externes.*

[A peine est-il besoin de mentionner que nos angles internes essentiels sont ceux proprement dits (intérieurs) du triangle abc (221*). Mais un angle externe essentiel n'est pas un angle extérieur; il est la somme géométrique des trois jumeaux de l'angle interne (142*), savoir son opposé au sommet et l'angle extérieur pris deux fois.]

3° *L'internat du contour $\mathfrak{C}$ est compris dans l'intérieur de tout angle interne, et son externat comprend celui de tout angle externe.*

Car un point de l'internat appartient, par définition, aux trois demi-plans $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{abc}$, en particulier aux deux d'entre eux, ou au seul, qui définissent l'intérieur

d'un angle interne essentiel (133*), ou facultatif (1°). Et un point intérieur à un angle externe appartient à un ou deux des opposés à ceux ou à celui des mêmes demi-plans qui définissent l'angle interne biadjacent.

II. *Quand un segment (non nul) [AB] n'a aucun point commun avec le contour, ses extrémités et autres points sont tous placés d'un même côté de lui (cf. §, IV, inf.).*

1° *Si un point O appartient à l'internat du contour, un autre U à son externat, le segment [OU] traverse le contour en un point unique.*

Le point O étant intérieur aux angles internes $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ (I, 3°), les demi-droites $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ le sont aussi (133*, II), coupent en conséquence, en des points intérieurs, α, β, γ , les segments $[bc], [ca], [ab]$ qui sous-tendent ces angles (*Ibid.*, IV). En même temps, leur concours O est tel pour les segments $[\alpha\beta], [\beta\gamma], [\gamma\alpha]$ qui les sous-tendent encore (*Ibid.*), ceci entraînant l'opposition du demi-plan $\overrightarrow{Ob\alpha}$, par exemple, à $\overrightarrow{Ob\gamma}$ identique à $\overrightarrow{Obc}$, semblablement celle de $\overrightarrow{Oc\beta}$ à $\overrightarrow{Oc\alpha}$, c'est-à-dire la juxtaposition extérieure des angles saillants $\alpha O\beta, \beta O\gamma$ par leur côté commun $\overrightarrow{O\beta}$, celle de $\beta O\gamma, \gamma O\alpha$ par $\overrightarrow{O\gamma}$, puis, pour ces trois angles, la propriété d'avoir l'angle replet de sommet O pour somme géométrique, puisque le second côté du dernier s'applique en $\overrightarrow{O\alpha}$ sur le premier côté du premier. Il en résulte que toute demi-droite issue de O, en particulier $\overrightarrow{OU}$, est placée à l'intérieur de l'un de ces trois angles, ou bien sur un de leurs côtés.

Si $\overrightarrow{OU}$ est intérieure à $\beta O\gamma$ par exemple, elle coupe en quelque point intérieur α' le segment $[\beta\gamma]$ qui sous-tend cet angle; et tout point intérieur au segment

$[O\alpha']$ appartient à l'internat du contour, parce que, intérieur ainsi aux angles saillants $O\beta\alpha'$, $O\alpha\alpha'$, à β_1 , α_1 par suite, dont les précédents sont de simples parties, il est tel pour chacun des trois demi-plans $\overline{\beta\alpha\alpha'}$, $\overline{\alpha\alpha'\beta}$, $\overline{\alpha\beta\alpha'}$ dont l'internat du contour est la région commune. Le point U, étranger à l'internat, l'est donc à ce segment, et, comme il est placé sur la demi-droite $\overline{OU}$, il appartient au prolongement du même segment $[O\alpha']$ au delà de α' . Ce point α' , intérieur ainsi au segment $[OU]$, est donc un abord entre lui et le contour, le seul existant, parce que la demi-droite $\overline{OU}$, intérieure à l'angle $\beta O\alpha$, extérieure par suite à $\alpha O\beta$, $\alpha O\alpha$, ne rencontre pas les côtés $[\alpha\beta]$, $[\alpha\alpha]$ sous-tendant ceux-ci. C'est une traversée, parce que, α' étant intérieur à $[OU]$, il y a opposition entre les demi-droites $\overline{\alpha'O}$, $\overline{\alpha'U}$ qui contiennent ses amorces $[\alpha'O]$, $[\alpha'U]$ sur ce segment, puis entre les demi-plans $\overline{\beta\alpha'O}$, $\overline{\beta\alpha'U}$ contenant ces demi-droites, c'est-à-dire déchaînement entre ces derniers considérés comme angles facultatifs du contour en α' (3, II, 3° et IV, 2°).

Si $\overline{OU}$ se confond avec $\overline{O\alpha}$ par exemple, tout point intérieur au segment $[O\alpha]$ appartient à l'internat du contour, comme pour $[O\alpha']$ tout à l'heure; effectivement, ce segment sous-tend les angles saillants $O\beta\alpha$, $O\alpha\alpha$, parties seulement des angles saillants β_1 , α_1 , ceci plaçant de même le point U sur son prolongement au delà de α . D'où l'existence d'un abord unique en α , puis son caractère de traversée, provenant du déchaînement des angles essentiels biadjacents α_1 , α_2 auxquels les demi-droites $\overline{\alpha O}$, $\overline{\alpha U}$ sont respectivement intérieures.

2° Notre proposition est vraie; car, si les points A, B étaient placés de part et d'autre du contour, le segment $[AB]$ traverserait celui-ci (1°), et l'hypothèse serait

contredite. Il en serait de même, si quelque point M intérieur à ce segment n'était pas placé dans la même région que ses extrémités, parce que le contour traverserait une fois chacun des segments partiels $[AM]$, $[BM]$, deux fois par suite le segment total $[AB]$.

3° Ajoutons, en passant, une remarque dont nous aurons besoin plus tard :

Quand les extrémités du segment $[OU]$ appartiennent à l'internat du contour, tous ses autres points s'y trouvent en même temps. Conclusion bien facile des considérations du sous-alinéa 1°.

III. *La pointe m d'un cil $[mm]$ du contour $\mathfrak{C}$ (3, III) appartient à son internat ou à son externat, selon que le cil est interne ou externe, c'est-à-dire que l'une ou l'autre qualification est applicable à l'angle m_x du contour, auquel le cil est intérieur (I, 1°).*

1° Si l'angle m_x est externe, son intérieur appartient à l'externat du contour (*Ibid.*, 3°), et il en est de même pour la demi-droite $\overline{mm}$ qui y est placée, partant pour le point m de celle-ci.

2° Quand m_x est un angle interne essentiel α_1 , la demi-droite $\overline{am}$ qui lui est intérieure coupe en un point intérieur α le côté $[bc]$ qui le sous-tend, et son point m est intérieur au segment $[\alpha x]$; car, s'il était en α ou sur le prolongement de celui-ci au delà de α , le cil $[mm]$ contiendrait le point α du contour, ce que sa définition ne permet pas. Or, l'intérieur de ce segment appartient à l'internat, parce qu'il est tel relativement à chacun des angles b_1 , c_1 (*cf.* II, 1°); son point m fait donc partie de cet internat.

3° Supposons enfin que m_x est interne facultatif,

cette hypothèse rendant intérieur à un côté $[\mathfrak{b}_c]$ le pied $\mathfrak{m}$ du cil.

Si la demi-droite $\overline{\mathfrak{m}m}$, qui est ainsi dans le demi-plan $\overline{\mathfrak{b}_c\alpha}$, passe par le sommet α , on recommencera le raisonnement ci-dessus (2°), à cela près que le segment $[\mathfrak{m}\alpha]$ et son prolongement au delà de α prendront les rôles que jouaient $[\alpha x]$ et son prolongement au delà de α .

Sinon, elle est intérieure à l'un ou l'autre des angles saillants $\mathfrak{b}_m\alpha$, $\mathfrak{c}_m\alpha$, au premier par exemple; et, visiblement, cet angle est interne essentiel pour le contour triangulaire $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_m\alpha$, en même temps que celui-ci a encore son seul point $\mathfrak{m}$ commun avec notre cil. On en conclut que le segment $[\mathfrak{m}m]$ est un cil aussi pour le contour auxiliaire, puis (1°) que ce point m appartient à l'internat $\{\mathfrak{a}\mathfrak{b}_m\alpha\}$ de ce dernier, à celui de $\mathfrak{c}$ à plus forte raison. Effectivement, tout point de $\{\mathfrak{a}\mathfrak{b}_m\alpha\}$ est intérieur à chacun des angles saillants $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_{am}$, et α_1 , par suite, dont le précédent n'est qu'une partie.

IV. 1° *La partie directe de notre énoncé est vraie, quand le chemin $\mathfrak{C}$ n'aborde pas le contour ($\theta = 0$).*

En prenant pour $\mathfrak{C}$ la notation explicite $\text{OABC} \dots \text{STU}$, le sommet A est du même côté de $\mathfrak{c}$ que O parce que le segment $[\text{OA}]$ ne peut donner aucun abord (II); puis B que A , que O par suite, pour cause semblable concernant le segment $[\text{AB}]$; puis C que B , A , O , et ainsi de suite jusqu'à U , en passant par $\dots \text{S}$, T .

2° *Elle l'est encore dans le cas d'un abord unique existant entre nos lignes $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire pour $\theta = 0$ (frôlement) ou $= 1$ (traversée).*

Soient $\text{M} \dots \text{P}$ l'abord considéré, $[\text{M}\mathfrak{l}]$, $[\text{P}\mathfrak{q}]$ ses amorces sur $\mathfrak{C}$ ($3, \text{IV}, 3^\circ$), puis $\text{OA} \dots \mathfrak{l}$ et $\text{UT} \dots \mathfrak{q}$ les parties du chemin comprises, la première entre O

et l , la seconde entre U et q , l'une et l'autre n'ayant plus d'abord avec le contour puisque $M \dots P$ en est un unique.

S'il s'agit d'un frôlement, les cils $[Ml]$, $[Pq]$ issus de M , P sur le contour $\mathfrak{C}$ sont enchaînés (3, III, IV), partant tous deux internes ou tous deux externes, et ceci place leurs pointes l , q simultanément, soit dans $\{\mathfrak{C}\}$, soit dans $\{\mathfrak{C}\}_\infty$, c'est-à-dire d'un même côté de $\mathfrak{C}$ (*Ibid.*). Les points O , U sont donc en même relation avec le contour, puisque, les chemins partiels $OA \dots l$, $UT \dots q$ ne l'abordant plus, O est du même côté que l , et U que q (1°).

Raisonnement tout semblable en cas de traversée, sauf que les cils $[Ml]$, $[Pq]$ sont alors déchaînés, par suite l'un interne, l'autre externe; qu'ainsi leurs pointes l , q sont de part et d'autre de $\mathfrak{C}$, et ceci assure, comme tout à l'heure, les mêmes positions relatives à O , U .

3° *Elle est vraie dans tous les cas.*

Par des points étrangers au contour $\mathfrak{C}$, découpons le chemin $\mathfrak{C}$ en tronçons contenant chacun un seul abord, et faisons-le décrire, de O à U , par un point mobile m (217*). Disons, en outre, que m franchit un abord quand il parcourt en entier le tronçon dont celui-ci fait partie, puis, qu'en passant de l'un à l'autre quelconque des points de coupure, il remménage si ces points sont d'un même côté de $\mathfrak{C}$, qu'il déménage s'ils sont de part et d'autre.

Comme ainsi, chaque fois qu'il franchit un abord, m remménage ou déménage selon que celui-ci est un frôlement ou une traversée (2°), son déplacement total de O à U , quel que soit le nombre des frôlements franchis, opérera finalement un remménagement quand le nombre des traversées franchies sera pair, un démé-

nagement quand il sera impair. En supposant donc O intérieur à $\{\mathfrak{C}\}$, U le sera également si θ est pair, mais intérieur à $\{\mathfrak{C}\}_\infty$ s'il est impair. Et semblablement, dans l'autre supposition.

4° Notre énoncé est de ceux, fort nombreux, dont la réciproque est une conséquence immédiate de la partie directe, pour la seule raison que les éventualités devenant tour à tour les hypothèses de celle-ci (la parité ou l'imparité du nombre θ dans le cas présent) sont contradictoires, et que chacune d'elles conduit à une conclusion incompatible avec les autres.

5. *Toute ligne $\mathfrak{L}$, soit interminée, soit fermée ($2, 1, 2^\circ, 3^\circ$), découpe le plan de nos tracés en deux régions continues (109*, II), ou rives, qui ne présentent aucun point commun (sauf ceux de la ligne, dans certaines acceptions des mots).*

Avec tout chemin dont les extrémités lui sont étrangères, le nombre de ses traversées est pair, si ces extrémités appartiennent à une même rive, impair, s'il en est autrement.

Entre deux extrémités de cette sorte, et selon qu'elles se trouvent dans une même rive ou non, on peut tracer un chemin, sans abord avec la ligne dans le premier cas, en présentant un seul dans le second, celui-ci étant une traversée réductible à un point unique.

1. *Entre la ligne considérée et un contour triangulaire quelconque $\mathfrak{C}$, les traversées sont toujours en nombre pair (cf. 8, inf.).*

1° Si elle est interminée, nous y marquerons un point $\mathfrak{t}$ étranger au contour $\mathfrak{C}$, à partir duquel, sur elle et dans un sens constant (217*), nous ferons mouvoir

indéfiniment un point mobile m . En vertu de la restriction du n° 2, I, 2°, ce point atteindra sûrement une position σ , en et au delà de laquelle il n'en prendra aucune appartenant au contour $\mathfrak{C}$ ou à son internat (4), ne cessant plus ainsi d'être placé dans son externat.

Une marche semblable, à partir de $\mathfrak{e}$ toujours, mais dans le sens opposé maintenant, fera découvrir pour m une autre position π jouissant des mêmes propriétés que σ ; et la partie $\sigma\pi$ de la ligne $\mathfrak{I}$, que donne la soudure, en $\mathfrak{e}$, des chemins $\mathfrak{e}\sigma$, $\mathfrak{e}\pi$ décrits successivement par m , contient la totalité de ses abords avec $\mathfrak{C}$, en même temps que les extrémités de ce chemin sont placées toutes deux dans l'externat de celui-ci, c'est-à-dire d'un même côté de lui. Or cette dernière circonstance impose la parité au nombre des traversées avec ce contour, tant de $\mathfrak{I}$ que de sa partie précitée (*Ibid.*).

2° Si la ligne $\mathfrak{I}$ est un second contour, son ouverture en quelque point étranger au premier $\mathfrak{C}$ (2, I, 3°) la change, sans modification dans les abords, en un chemin dont les extrémités, puisqu'elles se confondent, sont placées d'un même côté de $\mathfrak{C}$, et la conclusion précédente (1°) s'impose encore une fois (4).

II. Relativement à la ligne considérée, nous dirons provisoirement que deux points ne lui appartenant pas sont *assortis* ou *désassortis*, suivant que le nombre des traversées existant entre elle et le segment rectiligne qu'ils limitent est pair ou impair (la restriction du n° 2, I, 2°, rend impossible l'illimitation de ce nombre).

Trois points m , m_1 , m_2 étrangers à $\mathfrak{I}$ étant marqués arbitrairement, les relations de ce genre entre l'un d'eux quelconque m et chacun des autres

m_1, m_2 sont homonymes ou hétéronymes, selon qu'il y a assortiment entre ces derniers, ou désassortiment.

Soient $\theta, \theta_1, \theta_2$ les nombres des traversées données par les segments $[m_1 m_2]$, $[m_1 m]$, $[m_2 m]$ respectivement, et Π quelque nombre pair. On a

$$(2) \quad \theta + \theta_1 + \theta_2 = \Pi,$$

parce que cette somme est le nombre total des traversées de notre ligne et du contour triangulaire mm_1m_2m (I), puis, par suite,

$$\theta_1 + \theta_2 = \Pi - \theta.$$

Si m_1, m_2 sont mutuellement assortis, θ est pair, $\Pi - \theta$ également, et cette égalité montre que θ_1, θ_2 sont tous deux pairs ou tous deux impairs, c'est-à-dire qu'à chacun de ces deux points, simultanément, m est assorti dans le premier cas, désassorti dans le second.

Si les mêmes points sont au contraire désassortis, θ est impair, $\Pi - \theta$ en même temps, et, en vertu de la même égalité, l'un des nombres θ_1, θ_2 est pair, l'autre impair, ceci marquant que m est assorti à l'un de ces points mais désassorti à l'autre.

Ce raisonnement exige que les points m, m_1, m_2 ne soient pas en ligne droite; autrement, le contour mm_1m_2m serait enchevêtré et ne laisserait plus prise ainsi au théorème du n° 4. Mais alors, l'un des trois segments considérés serait la somme (géométrique) des deux autres, l'un des nombres $\theta, \theta_1, \theta_2$ serait égal à celle (arithmétique) des deux autres, et par là l'égalité (2) subsisterait.

III. *Tous les points étrangers à notre ligne se groupent en deux ensembles ne présentant aucun point commun, tels, en outre, que deux points d'un même ensemble sont toujours assortis, que deux*

points appartenant à l'un et à l'autre, respectivement, sont toujours désassortis.

1° *Un tel point P ayant été pris arbitrairement, les deux ensembles formés, l'un $\{P\}_a$ par lui et tous ceux qui lui sont assortis, l'autre $\{P\}_d$ par ses désassortis, embrassent dans leur réunion la totalité des points étrangers à la ligne, sans qu'un même de ceux-ci appartienne jamais à tous deux. C'est évident.*

2° *Dans un même ensemble, deux points sont toujours assortis.* Car, s'ils ne l'étaient pas, leurs relations avec P seraient hétéronymes, au lieu de consister tantôt en deux assortiments, tantôt en deux désassortiments (I).

Mais, appartenant à l'un et à l'autre, respectivement, ces points sont toujours désassortis. Car, autrement, leurs relations avec P seraient homonymes au lieu d'être un assortiment et un désassortiment.

3° D'après cela, il y a identité entre l'assortiment, le désassortiment de deux points, et leur situation, soit dans un même ensemble, soit dans l'un et l'autre, respectivement.

Enfin, rien n'est plus facile, en théorie, que la détermination des points appartenant à chaque ensemble sur toute sécante issue du point P, comme ensuite de tout autre en relation connue avec celui-ci, opération dont la construction effective des deux ensembles n'est que la répétition indéfinie.

IV. *Quand aucun des points d'un chemin n'est situé sur la ligne, tous appartiennent à un même ensemble.*

Pour un simple segment, il suffit d'observer que le nombre de ses traversées comprises entre deux quel-

conques de ses points se réduit à zéro, nombre pair, et qu'ainsi ces points sont toujours assortis (III).

Pour tout autre chemin, on raisonnera comme au n° 4, IV, 1°.

V. *Quand deux cils de notre ligne sont enchainés (3, III), leurs pointes peuvent être réunies par un chemin sans abord avec elle, appartiennent par suite à un même ensemble (IV).*

1° Considérons en premier lieu deux tels cils de même pied $\mathfrak{m}$, notés en conséquence $[\mathfrak{m}m']$, $[\mathfrak{m}m'']$, et supposons saillant, en outre, l'angle partiel $m'\mathfrak{m}m''$ découpé par les demi-droites $\overline{\mathfrak{m}m'}$, $\overline{\mathfrak{m}m''}$ dans l'angle de la ligne en $\mathfrak{m}$, auquel toutes deux sont intérieures.

Comme, à l'exception de $\mathfrak{m}$, les côtés $[\mathfrak{m}m']$, $[\mathfrak{m}m'']$ du triangle $m'\mathfrak{m}m''$ n'ont, par hypothèse, aucun point intérieur ou extrême en commun avec la ligne, on aperçoit sans peine qu'en vertu de la restriction du n° 2, I, 2°, il est possible d'assigner, sur $[\mathfrak{m}m'']$ par exemple, un point μ'' assez voisin de $\mathfrak{m}$ pour que le segment $[m'\mu'']$ ne rencontre pas la ligne.

D'ailleurs, le segment $[\mu''m'']$ ne la rencontre pas non plus, parce que, des deux parties en lesquelles $[\mathfrak{m}m'']$ est découpé par μ'' , il est celle qui ne contient pas $\mathfrak{m}$. Le chemin $m'\mu''m''$ réunit donc m' à m'' dans les conditions voulues.

2° Si l'angle partiel $m'\mathfrak{m}m''$ (1°) est neutre ou rentrant, la demi-droite $\overline{\mathfrak{m}m^{(0)}}$ d'un cil intérieur auxiliaire de même pied $[\mathfrak{m}m^{(0)}]$ pourra toujours le décomposer en deux angles saillants. On obtiendra donc un chemin de la nature voulue, en soudant ceux qui joignent ainsi m' à $m^{(0)}$, puis $m^{(0)}$ à $m^{(1)}$ (1°).

3° Considérons ensuite deux cils enchainés $[\mathfrak{m}m]$, $[\mathfrak{n}n]$, dont les pieds $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ sont distincts et chacun à

l'intérieur ou à l'extrémité d'un même côté de la ligne; en outre, supposons tous deux saillants les angles $\overline{nm}m$, $\overline{mn}n$ qu'à partir de leurs côtés $\overline{mn}$, $\overline{nm}$, les demi-droites $\overline{mm}$, $\overline{nn}$ détachent des angles m_x , n_x de la ligne, auxquels elles sont intérieures.

L'enchaînement supposé des angles m_x , n_x impose aux demi-droites $\overline{mm}$, $\overline{nn}$ des positions intérieures à un même demi-plan d'arête $\overline{mn}$. En nommant effectivement $\overline{ml}$, $\overline{np}$ les côtés des mêmes angles, autres que $\overline{mn}$, $\overline{nm}$, il y a homotaxie entre m_x , n_x piquetés $\overline{lmn}$, $\overline{mnp}$ (3, I, 1°), puis, par suite, entre leurs parties précitées, sous les notations $\overline{mmn}$, $\overline{mnn}$ (*Ibid.*, 2°). D'où l'antitaxie des mêmes parties piquetées maintenant $\overline{nm}m$, $\overline{mn}n$ (178**), puis, la situation de leurs seconds côtés $\overline{mm}$, $\overline{nn}$, dans un même demi-plan d'arête $\overline{mn}$, parce qu'ils sont saillants et que leurs côtés-origines $\overline{mn}$, $\overline{nm}$ sont appliqués sur une même droite $\overline{mn}$ dans des directions opposées (*Ibid.*).

Il en résulte qu'une demi-droite allant de n à un point indéterminé μ de $[\overline{mm}]$ appartient toujours à ce demi-plan, puis, qu'on peut prendre μ assez voisin de m pour qu'elle soit intérieure à l'angle précité $\overline{mn}n$, puis encore, en vertu de la restriction déjà invoquée (2, I, 2°), que ce rapprochement peut être poussé assez loin pour placer μ en une position m' soustrayant le côté $[\overline{nm'}]$ du triangle $m'mn$ à tout abord avec la ligne (n étant comme toujours excepté), c'est-à-dire faisant de ce côté un cil auxiliaire de pied n . Et ce nouveau cil $[\overline{nm'}]$ est enchaîné à $[\overline{nn}]$, car, étant intérieure à l'angle $\overline{mn}n$, sa demi-droite $\overline{nm'}$ l'est à plus forte raison, comme $\overline{nm}$, à l'angle n_x dont le précédent n'est qu'une partie.

Pour joindre m à n dans les conditions voulues, il

suffit donc d'adjoindre au segment $[mm']$ qui les remplit visiblement, comme $[\mu''m'']$ tout à l'heure (1°), le chemin réunissant m' à n dans les mêmes conditions (*Ibid.*).

4° Si les angles mmn , nnn précités sont rentrants tous deux, des cils auxiliaires $[mm']$, $[nn']$, dont les demi-droites divisent chacun d'eux en deux angles saillants, seront visiblement enchaînés à $[mm]$, $[nn]$, respectivement, l'un à l'autre par suite, et il ne reste qu'à joindre, dans les conditions voulues, m à m' (1°), puis m' à n' (3°), puis n' à n (1°).

5° Si enfin les cils en question $[mm]$, $[nn]$ sont quelconques, on peut visiblement leur en adjoindre d'autres en nombre limité, $[p'p']$, $[p''p'']$, ..., $[p^{(k)}p^{(k)}]$, qui soient enchaînés à tous deux, mutuellement en conséquence, tels en outre que, dans la suite $[mm]$, $[p'p']$, ..., $[p^{(k)}p^{(k)}]$, $[nn]$, deux consécutifs aient leurs pieds toujours placés sur un même côté de la ligne.

Pour obtenir le chemin dont l'existence est affirmée par l'énoncé, il suffit donc de souder ensemble ceux de même nature qui joignent m à p' , puis p' à p'' , puis finalement $p^{(k)}$ à n (4°).

VI. *Quand il s'agit de deux cils déchaînés, leurs pointes peuvent être réunies par un chemin sans autre abord avec la ligne qu'une traversée consistant en un point, et elles appartiennent aux deux ensembles respectivement.*

1° De ces deux cils $[mm]$, $[nn]$, si l'un $[nn]$ est intérieur à un angle de la ligne, saillant ou neutre, nommons $[nn']$ un cil auxiliaire dont la demi-droite $\bar{nn}'$ est opposée à $\bar{nn}$, cil visiblement déchaîné à $[nn]$, enchaîné par suite à $[mm]$. Le segment $[n'n]$ n'abordant la ligne que pour la traverser en n , sa soudure avec un

chemin joignant m à n' sans aborder celle-ci (V) fournit immédiatement celui que notre énoncé mentionne.

Les cils $[mm]$, $[nn']$ étant enchaînés, l'ensemble qui contient n' contient m aussi (*Ibid.*), mais il ne contient pas n , parce que le segment $[nn']$ traverse la ligne une fois seulement, savoir en n (III).

2° Si, au contraire, $[nn]$ est intérieur à un angle rentrant, nous tracerons, du même pied n , un premier cil auxiliaire $[nn']$ intérieur à l'opposé au sommet du biadjacent de cet angle, et un deuxième $[nn'']$ de demi-droite opposée à $\bar{nn}'$. Visiblement, ces deux cils sont déchaînés mutuellement, mais enchaînés à $[nn]$, $[mm]$ respectivement. On pourra donc (1°) construire, de m à n' , en passant par n'' , un chemin $m \dots n''n'$ sans autre abord qu'une traversée en n , puis (V) joindre n' à n par un autre n'offrant aucun abord. La réunion $m \dots n''n'n$ de ces deux chemins donnera celui qui est visé par l'énoncé; m , n appartiennent à des ensembles différents, parce qu'il est ainsi pour n' , n'' , comme ci-dessus (1°) pour n' , n , tandis que n , n' sont dans un même ensemble, m , n'' dans l'autre.

VII. Considérons maintenant deux points quelconques m, n d'un même ensemble $\mathfrak{F}_{\{x\}}$.

Si le segment $[mn]$ n'aborde pas la ligne, tous ses points appartiennent à cet ensemble, qui comprend ses extrémités (IV).

Si, au contraire, il existe des abords, soient, parmi tous leurs points, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ les plus rapprochés de m , n respectivement. Les segments $[mm]$, $[nn]$ sont, pour la ligne, des cils de pieds $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, puisqu'ils n'ont que ces points communs avec elle; et ces cils sont enchaînés, parce que, s'ils étaient déchaînés, leurs pointes m , n

n'appartiendraient pas toutes deux à l'ensemble considéré (VI), contrairement à ce qui a été supposé.

Entre ces pointes prises pour extrémités, l'observation de l'alinéa V assure ainsi la possibilité de tracer un chemin $\odot$ sans abord avec la ligne, dont tous les points par suite (IV) appartiennent en totalité (extrémités comprises) à un même ensemble, savoir $\mathfrak{F}|_x$, parce que celui-ci comprend par hypothèse chacune des extrémités m, n du chemin. Cet ensemble constitue donc une figure continue, puisque tout chemin tel que $[mn]$ ou $\odot$ peut être décomposé en côtés facultatifs dont la petitesse est arbitraire (2, III), (109*, II).

C'est pourquoi nous donnerons le nom de *rives* de la ligne $\mathfrak{F}$ aux deux ensembles de points que nous venons d'étudier.

VIII. Ainsi qu'au n° 4, IV, 3°, où un contour triangulaire jouait le rôle de notre ligne $\mathfrak{F}$ ici, représentons par $OA \dots IM \dots Pq \dots TU$ un chemin offrant avec elle un seul abord $M \dots P$ dont MI, Pq sont les amorces sur lui, chemin décomposable ainsi en trois parties, $OA \dots I, IM \dots Pp, qTU$, dont la première et la troisième n'abordent plus la ligne.

Pour celle-ci, les amorces précitées étant des cils, enchaînés s'il y a frôlement, déchaînés s'il y a traversée (3, IV, 3°), leurs pointes I, q sont intérieures à une même rive (VII) dans le premier cas (V), intérieures à l'une et à l'autre respectivement dans le second (VI); et, de la nature des chemins partiels $I \dots AO, q \dots TU$ qui a été mentionnée, il résulte que ces situations relatives des points I, q en imposent de mêmes noms à leurs autres points extrêmes O, U (IV).

Il suffit maintenant de poursuivre le raisonnement comme au n° 4, IV, 3°, pour achever la démonstration

de la partie de notre théorème que formule le deuxième alinéa de son énoncé.

IX. Nommons enfin m , n deux points quelconques étrangers à la ligne.

1° S'ils appartiennent à une même rive, l'opération expliquée tout à l'heure (VII) procurera leur jonction par un chemin sans abord et tracé tout entier dans cette rive.

2° Sinon, et cela arbitrairement, on tracera, d'un même point t de la ligne, deux cils déchainés $[t\mu]$, $[t\nu]$ dont les pointes μ , ν appartiennent par suite à l'une et à l'autre rive respectivement (VI); et, d'après cela, on peut supposer m , μ dans une même rive, n , ν dans l'autre. De m à μ , de n à ν , on pourra donc tracer des chemins $m \dots \mu$, $n \dots \nu$ sans abord avec la ligne (1°). D'autre part, la réunion des deux cils donne un troisième chemin à deux côtés, $\mu t \nu$ ne faisant que le traverser au point t . En soudant ces trois chemins, on obtiendra donc, en $m \dots \mu t \nu \dots n$, celui dont l'existence est affirmée par les derniers mots de notre énoncé.

§ bis. L'existence des deux rives, mutuellement opposées peut-on dire, que sépare ainsi toute ligne $\mathfrak{F}$ interminée ou fermée, est l'extension à un cas très large de la notion des deux régions continues (demi-plans opposés), en lesquelles le plan est découpé par une droite, la plus simple qui soit concevable parmi les lignes de cette sorte. Un bien facile examen de l'enchaînement des idées fera ressortir, en passant, le caractère primordial appartenant à cette notion dans la Géométrie topographique du plan (cas d'intersection des droites, définition des bandes, angles, aires polygones, etc.), à l'égal de celles de demi-droites, demi-

(510)

espaces, dans les spéculations de ce genre, restreintes au domaine d'une droite, ou bien étendues à la totalité de l'espace.

(*A suivre.*)