

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 475-480

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__475_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

656.

(1866, p. 266.)

Démontrer géométriquement que la division de la circonférence en sept parties égales se ramène à la trisection de l'angle dont la tangente est égale à $3\sqrt{3}$.

(MATHEW COLLINS.)

SOLUTION

PAR M. G. FONTENÉ.

Voici une démonstration analytique.

Soit AM l'arc d'un heptagone régulier convexe ou étoilé inscrit dans un cercle du centre O , et posons

$$\widehat{AOM} = x;$$

on doit avoir

$$7x = 2k\pi, \quad \cos 7x = 1,$$

ou, en désignant $\cos x$ par y ,

$$(y - 1)(8y^3 + 4y^2 - 4y - 1)^2 = 0.$$

Ainsi, les valeurs des quantités

$$\cos \frac{2\pi}{7}, \quad \cos \frac{4\pi}{7}, \quad \cos \frac{6\pi}{7}$$

(476)

sont les racines de l'équation

$$8y^3 + 4y^2 - 4y - 1 = 0,$$

et l'on trouve

$$y = \frac{\sqrt{7}}{3} \cos \frac{t}{3} - \frac{1}{6},$$

$$\cos t = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Si α est un angle dont le cosinus est $\frac{1}{2\sqrt{7}}$, on a donc

$$(1) \quad \cos \frac{2k\pi}{7} = y_h = \frac{\sqrt{7}}{3} \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2h\pi}{3} \right) - \frac{1}{6};$$

en prenant α entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on peut écrire

$$(2) \quad \tan \alpha = 3\sqrt{3}.$$

L'auteur de la question donne la construction suivante :
 « Soient A'O A et B'OB deux diamètres rectangulaires du cercle; prendre le point O' au $\frac{1}{6}$ de OA', porter sur OB une longueur OD égale à l'apothème de l'hexagone régulier inscrit au cercle et tracer avec O' comme centre l'arc de cercle DE₀F₀D' moindre qu'une demi-circonférence jusqu'à OB'; si les points E₀ et F₀ partagent cet arc en trois parties égales, la droite E₀F₀ rencontre la circonférence primitive en deux points M₀ et N₀ tels que chacun des arcs AM₀ et AN₀ est égal au $\frac{1}{7}$ de la longueur de cette circonférence. »

On a en effet

$$\tan \alpha = 3\sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{6}} = \frac{OD}{O'O},$$

$$\alpha = \widehat{AO'D}, \quad \frac{\alpha}{3} = \widehat{AO'E_0};$$

d'ailleurs, avec OA = 1,

$$O'D = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Dès lors, si E₀E₁E₂ est le triangle équilatéral inscrit au

cercle de centre O' , on a

$$\cos \frac{2k\pi}{7} = y_h = O'E_h \cos \widehat{AO'E_h} - O'O = OP_h,$$

en appelant P_h la projection du point E_h sur $A'A$. Dès lors, en menant par les points P_h des perpendiculaires au diamètre $A'A$ jusqu'à la circonférence primitive, on obtient des points M_h et N_h tels que les angles $\widehat{AOM_h}$, par exemple, sur les angles $\frac{2k\pi}{7}$. Si chaque point M est pris du même côté de $A'A$ que le point E correspondant, on a

$$h = 0, \quad 1, \quad 2,$$

$$k = 1, \quad 3, \quad -2,$$

ou

$$k \equiv 2h + 1 \pmod{7}.$$

Les sept points $A, M_0, N_2, M_1, \dots$ sont les sommets des hexagones considérés.

2098.

(1908, p. 384.)

Construire une hyperbole connaissant en position un axe, un cercle bitangent dont le centre est sur l'axe, une direction asymptotique et les points de rencontre avec l'axe de la tangente et de la normale en un point de l'hyperbole.

(GILBERT.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Étant données les coniques bitangentes à un cercle donné O ayant un axe fixe passant par O et des directions asymptotiques fixes, le lieu des pieds des normales à ces coniques issues d'un point de l'axe est un cercle concentrique au cercle O .

Soient O l'origine, Oy l'axe fixe, q l'ordonnée du point considéré, V l'angle des asymptotes avec l'axe; l'équation des coniques considérées est

$$x^2 \sin^2 V - y^2 \cos^2 V + 2\mu y - \mu^2 - R^2 \sin^2 V = 0;$$

la corde joignant les pieds des normales issues du point considéré est $y = \mu + q \sin^2 V$; éliminons μ , il vient

$$(C) = x^2 + y^2 - q^2 \sin^2 V - R^2 = 0.$$

Ceci posé, si N est le pied de la normale, T le pied de la tangente au point M de l'hyperbole à contruire sur l'axe donné, M sera à l'intersection du cercle de diamètre NT et du cercle (C). L'axe radical de ces deux cercles rencontre la perpendiculaire menée à N à une direction asymptotique en un point R, appartenant à une asymptote et l'hyperbole est déterminée.

La seule condition de possibilité est l'intersection réelle des cercles (C) et NT.

2401.

(1908, p. 478.)

La quintique gauche qui est l'intersection partielle d'une quadrique et d'une surface du troisième ordre ayant une droite commune dépend de 20 paramètres.

(G. F.)

SECONDE SOLUTION

Par L'AUTEUR.

La solution donnée à la page 189 du présent Volume aurait besoin d'être complétée : toute quintique tracée sur une quadrique, et représentée par une relation de la forme indiquée, est-elle une quintique de l'énoncé?

Voici une autre démonstration. Les équations de la quadrique et de la surface du troisième ordre étant

$$\alpha\gamma - \beta\delta = 0, \quad \alpha S - \beta T = 0,$$

la quintique est encore sur la surface du troisième ordre

$$\gamma T - \delta S = 0,$$

qui ne contient pas la droite D; l'équation générale des surfaces du troisième ordre passant par la quintique est ainsi (mais il y aurait lieu d'insister)

$$(\alpha S - \beta T) + k(\gamma T - \delta S) + \theta(\alpha\gamma - \beta\delta) = 0,$$

θ étant une fonction linéaire des coordonnées; une telle surface dépend donc de 5 paramètres. Dès lors, le nombre des

paramètres dont dépend la quintique est

$$(9 + 19 - 3) - 5 \quad \text{ou} \quad 20.$$

On peut écrire l'équation ci-dessus sous la forme

$$[(\alpha - k\delta)S - (\beta - k\gamma)T] + \theta(\alpha\gamma - \beta\delta) = 0.$$

On met ainsi en évidence la droite D_1 commune à la quadrique et à la surface du troisième ordre considérée.

2105

(1908, p. 479.)

Les tangentes en trois points A, B, C d'une parabole de foyer F forment un triangle A', B', C'. Démontrer les relations

$$\begin{aligned} \overline{FA} \cdot \overline{FA'}^2 &= \overline{FB} \cdot \overline{FB'}^2 = \overline{FC} \cdot \overline{FC'}^2, \\ \overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC} &= \overline{FA'} \cdot \overline{FB'} \cdot \overline{FC'}. \end{aligned}$$

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. J. ROSE.

Les triangles semblables $FA'B$ et FCA' donnent immédiatement

$$\overline{FA'}^2 = \overline{FB} \cdot \overline{FC}.$$

Donc

$$\overline{FA} \cdot \overline{FA'}^2 = \overline{FA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{FC}.$$

La même relation existe pour les autres quantités analogues; par suite la première relation est vérifiée. De plus

$$\overline{FA'}^2 \cdot \overline{FB'}^2 \cdot \overline{FC'}^2 = \overline{FA}^2 \cdot \overline{FB}^2 \cdot \overline{FC}^2,$$

ce qui démontre la seconde relation.

Autres solutions par MM. BOUVAIST, G. PÉLISSIER, V. RETALI, LEZ.

2106

(1908, p. 480.)

Si l'on considère les paraboles qui sont tangentes en O à une droite OT et qui ont la corde normale OA fixe :

- 1° *Le lieu du foyer de ces paraboles est une cissoïde droite;*
- 2° *La directrice enveloppe une parabole.*

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. G. PELISSIER.

1° Si l'on prend OA pour axe des x , OT pour axe des y et qu'on pose $OA = a$, l'équation générale des paraboles considérées dans l'énoncé est

$$(y - \lambda x)^2 - \lambda^2 ax = 0.$$

L'axe est la droite

$$(1) \quad 2(m^2 + 1)(y - \lambda x) + a\lambda^3 = 0.$$

Le foyer F est sur la droite symétrique par rapport à OA de la direction de l'axe ; cette droite a pour équation

$$(2) \quad y + \lambda x = 0.$$

Le lieu du foyer s'obtient en éliminant λ entre (1) et (2) ; on obtient l'équation

$$4x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$$

qui représente une cissoïde ayant son point de rebroussement en O.

2° La projection de O sur la directrice qui est symétrique du foyer par rapport à la tangente fixe OT décrit la cissoïde symétrique du lieu de F par rapport à OT ; la directrice enveloppe donc la podaire négative de cette dernière cissoïde par rapport à O, c'est-à-dire une parabole de sommet O et d'axe OA.

Autres solutions par MM. BOUVAIST, LEZ, V. RETALI, J. ROSE, M. TÊTU.