

Concours d'admission à l'École normale supérieure et aux bourses de licence en 1909. Composition de mathématiques (Sciences I)

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 404-422

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__404_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1909.**

**Composition de Mathématiques
(Sciences I).**

Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère l'hyperbole (H) ayant pour équation

$$x^2 - y^2 = r^2$$

et les coniques (T) représentées par l'équation

$$x^2 + 3y^2 + 6rty - 3r^2 = 0,$$

où t est un paramètre variable.

1° *Montrer qu'en leurs quatre points d'intersection A, B, C, D une courbe (T) et la conique (H) sont orthogonales.*

2° *Étudier les cercles passant par A, B, C, D. Lieu des foyers des coniques (T).*

3° *Trouver l'enveloppe des droites AB. Exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre les coefficients de l'équation générale d'une de ces droites (non parallèle à Ox).*

4° *Lieu du point de contact d'une conique (T) et d'une conique ayant mêmes foyers que (H).*

5° *Un champ de forces, dont les forces sont parallèles au plan xOy , est tel que les traces des surfaces de niveau sur ce plan soient les coniques (T). Trouver les lignes de forces situées dans le plan xOy . Indiquer la forme et la disposition de ces lignes, les unes par rapport aux autres.*

6° On considère un point E de coordonnées $x = 0$, $y = l$ et celles des lignes de force qui coupent Ox en trois points réels M_1, M_2, M_3 . Calculer la somme

$$\frac{1}{EM_1^2} + \frac{1}{EM_2^2} + \frac{1}{EM_3^2}.$$

Peut-on trouver une valeur réelle l , telle que cette somme reste constante lorsque la ligne de force varie?

SOLUTION

Par JEAN SERVAIS.

1° Si l'on pose

$$f(x, y) \equiv x^2 - y^2 - r^2,$$

$$g(x, y) \equiv x^2 + 3y^2 + 6rty - 3r^2,$$

on a

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

$$\equiv 2x^2 - 6y^2 - 6rty \equiv 3f(x, y) - g(x, y),$$

ce qui prouve que pour tout point commun aux deux courbes, dont, par suite, les coordonnées annulent à la fois $f(x, y)$ et $g(x, y)$, la condition d'orthogonalité est vérifiée.

2° Le cercle passant par les quatre points d'intersection de (T) et (H) a pour équation

$$f(xy) + g(xy) \equiv 2x^2 + 2y^2 + 6rty - 4r^2 = 0.$$

Quand t varie on a là l'équation générale des cercles passant par les foyers de l'hyperbole (H).

L'équation de la conique (T) s'écrit

$$\frac{x^2}{3r^2(1+t^2)} + \frac{(y+rt)^2}{r^2(1+t^2)} - 1 = 0.$$

Sous cette forme on voit immédiatement que les

coordonnées x et y des foyers réels vérifient les équations

$$\begin{aligned} y + rt &= 0, \\ x^2 &= 2r^2(1 + t^2). \end{aligned}$$

Le lieu des foyers est donc l'hyperbole

$$x^2 - 2y^2 = 2r^2,$$

qui a pour sommets de l'axe transverse les foyers de (H).

3° Les sécantes communes aux deux coniques (H) et (T) ont pour équation

$$(1) \quad \begin{cases} g(x, y) + \lambda f(x, y) \\ \equiv (1 + \lambda)x^2 + (3 - \lambda)y^2 + 6rty - (3 + \lambda)r^2 = 0, \end{cases}$$

où λ est racine de l'équation

$$\Delta(\lambda) \equiv r^2(1 + \lambda)[\lambda^2 - 9(1 + t^2)] = 0.$$

A la racine $\lambda = -1$ correspondent les cordes parallèles à Ox . Les cordes non parallèles à Ox sont fournies par

$$(2) \quad \lambda^2 - 9t^2 - 9 = 0.$$

Si nous exprimons λ et t , vérifiant l'équation (2), en fonction d'un paramètre, nous aurons, en posant, par exemple,

$$\lambda = 3t + \theta,$$

les expressions

$$t = \frac{9 - \theta^2}{6\theta},$$

$$\lambda = \frac{9 + \theta^2}{2\theta}.$$

Et l'équation (1) s'écrit

$$(\theta^2 + 2\theta + 9)x^2 - [(\theta - 3)y + (\theta + 3)r]^2 = 0.$$

Une des droites AB a donc pour équation

$$(3) \quad ux + (\theta - 3)y + (\theta + 3)r = 0,$$

en posant

$$(4) \quad u^2 = \theta^2 + 2\theta + 9.$$

Il suffit donc d'exprimer u et θ en fonctions rationnelles d'un paramètre. Posons, à cet effet,

$$u = \theta + \alpha,$$

et la relation (4) donne

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{9 - \alpha^2}{2(\alpha - 1)}, \\ u &= \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 9}{2(\alpha - 1)}. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs de θ et u dans l'équation (3), elle s'écrit

$$\alpha^2(x - y - r) - 2\alpha(x + 3y - 3r) + 9x + 15y + 3r = 0.$$

L'enveloppe de cette droite, quand α varie, est l'hyperbole

$$(x + 3y - 3r)^2 - (x - y - r)(9x + 15y + 3r) = 0$$

ou, en développant et simplifiant,

$$2x^2 - 6y^2 - 3r^2 = 0.$$

4° Les coniques homofocales à (H) ont pour équation

$$(5) \quad \frac{x^2}{\lambda + r^2} + \frac{y^2}{\lambda - r^2} - 1 = 0.$$

L'équation aux y des points d'intersection de cette

conique et de la conique (T) est

$$\frac{-3y^2 - 6rty + 3r^2}{\lambda + r^2} + \frac{y^2}{\lambda - r^2} - 1 = 0,$$

ou, en développant,

$$(6) \quad 2(\lambda - 2r^2)y^2 + 6rt(\lambda - r^2)y + (\lambda - r^2)(\lambda - 2r^2) = 0.$$

Pour que les coniques soient tangentes, il faut et il suffit ($y \neq 0$) que cette équation ait une racine double. Elles sont d'ailleurs alors *bitangentes*. Ceci donne

$$9r^2t^2(\lambda - r^2)^2 - 2(\lambda - r^2)(\lambda - 2r^2)^2 = 0.$$

En supprimant la solution étrangère $\lambda = r^2$, il reste la relation

$$9r^2t^2(\lambda - r^2) - 2(\lambda - 2r^2)^2 = 0,$$

d'où

$$3rt = \pm \frac{\sqrt{2(\lambda - 2r^2)}}{\sqrt{\lambda - r^2}}.$$

En portant cette valeur de t dans l'équation (6), elle s'écrit

$$(\sqrt{2}y \mp \sqrt{\lambda - r^2})^2 = 0.$$

L'élimination de λ entre l'équation (5) et l'équation précédente donne le lieu cherché

$$x^2 - y^2 - r^2 = 0.$$

C'est l'hyperbole (H).

Ce résultat était facile à prévoir. Si, en effet, M et N sont deux points d'intersection de l'ellipse (T) avec l'hyperbole (H), symétriques par rapport à Oy , il existe une ellipse (E), homofocale à (H), et une seule, passant par M et N.

Les ellipses (T) et (E) sont *toutes deux*, aux points M et N, orthogonales à (H); elles sont donc tangentes entre elles en ces points.

A chaque ellipse (T) correspondent ainsi *deux* ellipses (E), homofocales à (H) et bitangentes à (T). Le lieu des points de contact M et N est l'hyperbole (H).

5° Soit U la fonction de forces. Comme les forces sont parallèles au plan xOy , on a

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

La fonction U ne dépend donc que de x et y .

Les surfaces de niveau sont donc des cylindres, et les lignes de force sont les trajectoires orthogonales des sections droites de ces cylindres.

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales des ellipses (T) est

$$2xy \frac{dy}{dx} = 3y^2 - x^2 + 3r^2,$$

ou

$$x \frac{d(y^2)}{dx} - 3y^2 = 3r^2 - x^2,$$

équation *linéaire* en y^2 .

En intégrant par le procédé classique, on trouve

$$(7) \quad y^2 = hx^3 + x^2 - r^2,$$

où h désigne une constante arbitraire.

La forme de la courbe (7) dépend du nombre des racines réelles de l'équation

$$(8) \quad hx^3 + x^2 - r^2 = 0.$$

1° Si $h^2 < \frac{4}{27r^2}$, l'équation a trois racines réelles x_1 , x_2 , x_3 et l'on a

$$y^2 = h(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

La courbe coupe l'axe Ox en trois points réels M_1 , M_2 , M_3 .

Si, par exemple, h est positif, il y a une racine positive x_1 , comprise entre r et $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ et deux racines négatives séparées par $-r\sqrt{3}$,

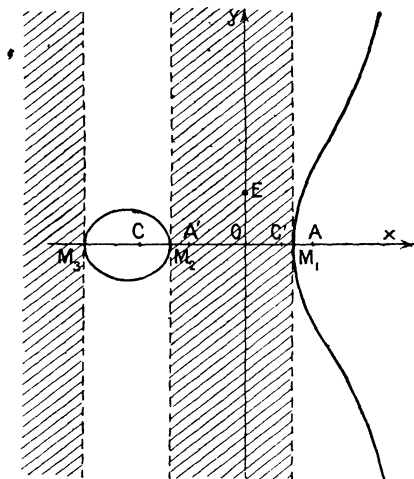
$$x_3 < -r\sqrt{3} < x_2 < 0 < \frac{r\sqrt{3}}{2} < x_1 < r.$$

y n'est réelle que si

$$x > x_1 \quad \text{ou} \quad x_3 < x < x_2.$$

La courbe (*fig. 1*), symétrique par rapport à Ox , se

Fig. 1.



compose d'une ovale M_3M_2 et d'une branche infinie à branches paraboliques M_1 .

2° Si $h^2 > \frac{4}{27r^2}$, il n'y a plus qu'une seule racine réelle de l'équation (8).

La courbe a la forme de celle de la figure 1 dans laquelle on supprime l'ovale.

Pour étudier les dispositions des courbes (7) lorsque h varie, remarquons d'abord que deux courbes, correspondantes aux valeurs h et h' de la constante, ne se coupent pas en des points réels, car l'équation aux x des points d'intersection est $x = 0$, qui donne des valeurs imaginaires de y .

Si l'on considère les racines de l'équation (8) comme fonction de h , on a, pour l'une de ces racines,

$$\frac{dx}{dh} = -\frac{x^2}{3hx+2}.$$

Supposons $h > 0$:

La racine positive x_1 est toujours *décroissante* avec h .

Les racines négatives x_2 et x_3 ne sont réelles que si

$$h < \frac{2}{3r\sqrt{3}},$$

et, dans ce cas, il est facile de vérifier que $-\frac{2}{3h}$ est compris entre x_2 et x_3 , de telle sorte que

$$\frac{dx_2}{dh} = -\frac{x_2^2}{3hx_2+2} < 0, \quad \frac{dx_3}{dh} = -\frac{x_3^2}{3hx_3+2} > 0.$$

En résumé, si h croît de 0 à $\frac{2}{3r\sqrt{3}}$,

$$x_1 \text{ décroît de } r \text{ à } \frac{r\sqrt{3}}{2},$$

$$x_2 \text{ décroît de } -r \text{ à } -r\sqrt{3},$$

$$x_3 \text{ croît de } -\infty \text{ à } -r\sqrt{3}.$$

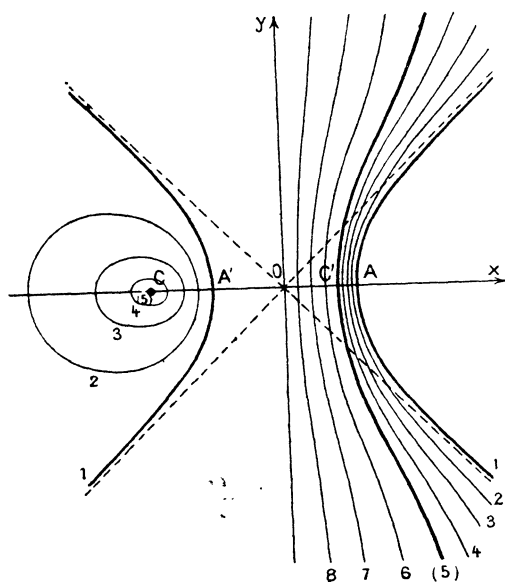
L'ovale M_2M_3 diminue, et, quand $h = \frac{2}{3r\sqrt{3}}$, cette ovale se réduit à un point.

Quand h continue à croître de $\frac{2}{3r\sqrt{3}}$ à $+\infty$, l'ovale disparaît et x , décroît de $\frac{2}{r\sqrt{3}}$ à 0.

La figure 2 indique les courbes successives obtenues quand h croît de 0 à $+\infty$.

Pour $h = 0$, on a l'hyperbole H : (1);

Fig. 2.



Quand h croît de 0 à $\frac{2}{3r\sqrt{3}}$, on a les courbes successives (2), (3), (4);

Pour $h = \frac{2}{3r\sqrt{3}}$ on a la courbe (5), l'ovale étant réduite au point C;

Enfin, h croissant de $\frac{2}{3r\sqrt{3}}$ à $+\infty$, on a les courbes

sans ovale (6), (7), (8) qui s'aplatissent sur Oy et tendent à se confondre avec Oy .

Lorsque h est négatif, on a les courbes symétriques de celles-ci par rapport à Oy .

6° Soient M l'un des points M_1, M_2, M_3 , et x son abscisse. On a

$$\overline{EM}^2 = x^2 + l^2.$$

Posons

$$(9) \quad x^2 + l^2 = \frac{1}{z},$$

et formons l'équation en z .

L'équation (8) s'écrit

$$(hx + 1) \left(\frac{1}{z} - l^2 \right) - r^2 = 0;$$

on en tire

$$x = \frac{(r^2 + l^2)z - 1}{h(1 - l^2 z)}.$$

En portant dans l'équation (9), il vient

$$\frac{[(r^2 + l^2)z - 1]^2}{h^2(1 - l^2 z)^2} + l^2 = \frac{1}{z},$$

ou

$$[(r^2 + l^2)z - 1]^2 z + (l^2 z - 1)^2 h^2 = 0,$$

ou encore

$$[(r^2 + l^2)^2 + l^6 h^2] z^3 - [2(r^2 + l^2) + 3l^4 h^2] z^2 + \dots = 0.$$

La somme S des racines de cette équation est

$$S = \frac{3l^4 h^2 + 2(r^2 + l^2)}{l^6 h^2 + (r^2 + l^2)^2}.$$

Pour que S reste constante quand h varie, il faudrait que l'on ait ($l \neq 0$)

$$\frac{3l^4}{l^6} = \frac{2(r^2 + l^2)}{(r^2 + l^2)^2}$$

ou

$$3(r^2 + l^2) = 2l^2,$$

égalité qui n'est pas vérifiée pour des valeurs réelles de l .
Le seul cas où S est indépendant de h est donc celui où $l = 0$, et alors

$$S = \frac{2}{r^2}.$$

Composition de Mathématiques

(Sciences I et II).

PREMIERE QUESTION.

On laisse tomber, sans vitesse initiale, un point matériel pesant dont la masse est 1^e dans un milieu qui oppose à son mouvement une résistance proportionnelle à la vitesse; soit k le coefficient de proportionnalité; on compte le temps à partir du moment où le mouvement commence.

I. *Quels sont, au bout du temps t , la vitesse de ce mobile et le chemin z qu'il a parcouru? Vérifier, sur les formules trouvées, que, lorsque k est très petit, le mouvement est, pendant quelque temps, à peu près le même que si le mobile tombait dans le vide.*

II. *On laisse tomber au même instant plusieurs points matériels **pesants**, ayant chacun une masse égale à 1^e, dans des milieux divers qui opposent tous une résistance proportionnelle à la vitesse, mais avec des coefficients k différents; on compare les mouvements de ces points au bout du temps t . Il est aisé de prévoir, d'après la nature même de la question, dans quel sens varient la vitesse et le*

chemin parcouru lorsque k augmente. Vérifier analytiquement ces prévisions.

III. Calculer le coefficient k par la condition suivante : Le point matériel, pour tomber sans vitesse initiale d'une hauteur égale à 2^s , met un dixième de seconde de plus que s'il tombait dans le vide.

On prendra $g = 981^{\text{cm}}$ et l'on se bornera à calculer le premier chiffre significatif de k .

DEUXIÈME QUESTION.

On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad y' + P y + Q = 0,$$

où y est la fonction inconnue et où P, Q sont des fonctions de la variable x .

I. Montrer que toute solution de cette équation vérifie l'équation différentielle

$$(2) \quad y'' + (P' - P^2)y + Q' - PQ = 0$$

(y' et y'' désignent les dérivées première et seconde de y , P' et Q' les dérivées de P et de Q).

II. Déterminer P et Q de façon que l'on ait, en désignant par α et β des constantes données,

$$P' - P^2 = \alpha^2, \quad Q' - PQ = \beta.$$

III. En adoptant pour P, Q les fonctions ainsi trouvées, on intégrera les deux équations (1) et (2) et l'on calculera ce que devient le premier membre de l'équation (1) quand on y remplacera y par la solution générale de l'équation (2).

SOLUTION

Par JEAN SERVAIS.

PREMIÈRE QUESTION. — Le point décrit une verticale sur laquelle nous comptons positivement les z vers le bas, à partir du point de départ.

L'équation du mouvement est alors

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g - k \frac{dz}{dt}.$$

I. En intégrant cette équation et déterminant les constantes de façon que, pour $t = 0$, z et $\frac{dz}{dt}$ s'annulent, on trouve

$$z = \frac{g}{k^2} (e^{-kt} + kt - 1),$$

$$v = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}).$$

En développant l'exponentielle en série, on a

$$(1) \quad z = g \left(\frac{t^2}{2} - \frac{kt^3}{3!} + \frac{k^2 t^4}{4!} - \dots \right),$$

ce qui prouve que, lorsque k est très petit, ainsi que t , z diffère très peu de $\frac{1}{2} g t^2$.

II. Donnons à t une valeur fixe et étudions les variations de z et v avec k .

On a

$$\frac{\partial z}{\partial k} = - \frac{g}{k^3} [e^{-kt}(kt + 2) + kt - 2],$$

$$\frac{\partial v}{\partial k} = - \frac{g}{k} [1 - e^{-kt}(1 + kt)].$$

Posons

$$kt = u,$$

$$f(u) = e^{-u}(u+2) + u - 2;$$

on a

$$f'(u) = 1 - e^{-u}(1+u)$$

et, par suite, on peut écrire

$$\frac{\partial z}{\partial k} = -\frac{g}{k^3} f(u),$$

$$\frac{\partial v}{\partial k} = -\frac{g}{k^2} f'(u).$$

$f(u)$ et $f'(u)$ sont positifs lorsque u est positif.

En effet, on a

$$f''(u) = u e^{-u}.$$

$f''(u)$ étant positif avec u , $f'(u)$ croît et, comme $f'(0) = 0$, $f'(u)$ croît à partir de zéro, donc est positif.

$f'(u)$ étant positif, comme $f(0) = 0$, $f(u)$ croît également à partir de zéro et est positif.

z et v décroissent donc tous deux lorsque k croît, ce qui était évident.

III. En chute libre, il faut, dans le vide, 2 secondes à un mobile pour tomber de $2g$.

Si le mobile tombe de la hauteur $2g$ en $2,1$ secondes, on aura, en vertu de l'équation développée (1),

$$2g = g \left[\frac{(2,1)^2}{2} - \frac{k(2,1)^3}{6} + \frac{k^2(2,1)^4}{24} - \dots \right]$$

ou

$$2 = \frac{(2,1)^2}{2} - \frac{k(2,1)^3}{6} + \frac{k^2(2,1)^4}{24} - \dots;$$

on aura une valeur approchée de k en limitant la série

(418)

au second terme :

$$2 = 2,2 - 1,5k,$$

$$k = \frac{0,2}{1,5} = 0,1.$$

DEUXIÈME QUESTION. — I. Toute fonction y vérifiant l'équation

$$(2) \quad y' + Py + Q = 0$$

vérifie l'équation obtenue par dérivation

$$(3) \quad y'' + Py' + P'y + Q' = 0$$

et, par suite, celle obtenue en éliminant y' entre (2) et (3) :

$$(4) \quad y'' + (P' - P^2)y + Q' - PQ = 0.$$

II. Si l'on a

$$P' - P^2 = x^2,$$

on a

$$\frac{dP}{x^2 + P^2} = dx,$$

ou, en intégrant,

$$\text{arc tang } \frac{P}{x} = \alpha x + \alpha',$$

$$P = x \text{ tang}(\alpha x + \alpha').$$

On a ensuite

$$Q' - \alpha \text{ tang}(\alpha x + \alpha') Q = \beta,$$

dont l'intégrale obtenue par la méthode classique de l'équation différentielle linéaire est

$$Q = \frac{\beta}{\alpha} \text{ tang}(\alpha x + \alpha') + \frac{\beta'}{\cos(\alpha x + \alpha')},$$

α' et β' étant deux nouvelles constantes.

III. Les équations (2) et (4) s'écrivent alors

$$(2) \quad y' + x \operatorname{tang}(x + \alpha') \left(y + \frac{\beta}{\alpha^2} \right) + \frac{\beta'}{\cos(x + \alpha')} = 0,$$

$$(4) \quad y'' + \alpha^2 y + \beta = 0.$$

L'équation (2) est une équation linéaire du premier ordre en $y + \frac{\beta}{\alpha^2}$ dont l'intégrale générale est

$$(5) \quad y = A \cos(x + \alpha') - \frac{\beta'}{\alpha} \sin(x + \alpha') - \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

L'équation (4) est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'intégrale générale est

$$(6) \quad y = B \cos \alpha x + C \sin \alpha x - \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

Portons cette intégrale dans le premier membre de l'équation (2) et ce premier membre devient, toutes simplifications faites,

$$\alpha \frac{B \sin \alpha' + C \cos \alpha' + \frac{\beta'}{\alpha}}{\cos(x + \alpha')}.$$

On obtient les intégrales particulières de (4) qui vérifient l'équation (2) en choisissant B et C de façon que

$$B \sin \alpha' + C \cos \alpha' + \frac{\beta'}{\alpha} = 0.$$

On retrouve l'intégrale sous la forme (5) en vérifiant cette relation linéaire de la façon suivante

$$B = A \cos \alpha' - \frac{\beta'}{\alpha} \sin \alpha',$$

$$C = -A \sin \alpha' - \frac{\beta'}{\alpha} \cos \alpha',$$

A étant une constante arbitraire.

Composition de Mathématiques.

(Lettres : C.)

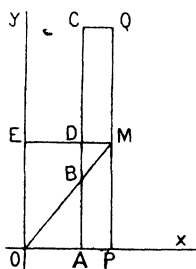
On considère un système d'axes rectangulaires Ox , Oy et l'on prend sur la partie positive de l'axe Ox un point A dont la distance au point O soit égale à l'unité de longueur (fig. 3).

On désignera par (S) la courbe qui représente la fonction $y = x^3$.

Soit M un point de cette courbe et soit $x = OP$ l'abscisse de ce point qu'on supposera positive.

Par le point M on mène une parallèle à l'axe Ox ;

Fig. 3.



soient E et D les points où elle rencontre l'axe Oy et la parallèle à cet axe menée par le point A ; soit B le point d'intersection des droites AD et OM ; on prend sur AD un point C tel que AC et AB soient de même sens et qu'on ait $AC = 3AB$. Soit enfin Q le point où la parallèle à l'axe Ox menée par le point C rencontre la parallèle à Oy menée par le point M .

On évaluera au moyen de x le vecteur MQ regardé comme positif ou négatif suivant que Q est au-dessus ou au-dessous de M et l'on étudiera la façon dont varie la fonction ainsi trouvée quand x croît de 0 à $+\infty$.

Dans les mêmes conditions, le point M décrit la courbe (S) et le point Q une courbe correspondante (S') ; démontrer que l'aire comprise entre cette dernière courbe, l'axe Ox et l'ordonnée PQ du point Q est égale à l'aire du rectangle $OADE$.

Les courbes (S) et (S') se coupent au point O et en un point K dont on calculera les coordonnées; évaluer l'aire comprise entre les arcs des courbes (S) et (S') qui vont du point O au point K .

SOLUTION.

On a

$$\overline{AB} = \frac{y}{x} = x^2, \quad \overline{AC} = 3x^2,$$

$$u = \overline{MQ} = 3x^2 - x^3 = x^2(3 - x),$$

$$\frac{du}{dx} = 3x(2 - x).$$

Quand x croît de 0 à 2, u croît de 0 à 4 et atteint un maximum pour $x = 2$. Ensuite u décroît de 4 à $-\infty$ en passant par zéro pour $x = 3$.

La courbe (S) est une parabole cubique, (S') est une parabole, et l'ordonnée de (S') est la dérivée de celle de (S) . L'aire en question est égale à

$$\int_0^x 3x^2 dx = x^3 = MP = OA \times DA.$$

La courbe (S') (puisque $\overline{MQ} > 0$) est au-dessus de la courbe (S) quand x varie de 0 à 3. Les deux courbes

(422)

se coupent en $x = 3$ (MQ = 0). L'aire comprise entre (S) et (S') est donc

$$\int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = \left| x^3 - \frac{x^4}{4} \right|_0^3 = \frac{27}{4}.$$