

JEAN SERVAIS

Composition d'algèbre et trigonométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 372-377

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__372_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPOSITION D'ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE;

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

Étant donnée la fonction $y = \sqrt[3]{x^2(x-6)}$ de la variable réelle x :

I. Étudier les variations de cette fonction, et les représenter par une courbe.

II. Calculer l'intégrale indéfinie $\int y dx$.

III. Soit $F(x)$ l'une quelconque des fonctions primitives de y :

Trouver trois constantes P, Q, R telles que la fonction

$$\Phi(x) = F(x) - Px^2 - Qx - R \log |x|$$

reste finie lorsque x devient infini. Et prouver qu'il n'y a qu'un seul système de valeurs des constantes P, Q, R satisfaisant à cette condition.

NOTA. — La notation $\log |x|$ désigne le logarithme népérien de la valeur absolue de x .

IV. Les constantes P, Q, R étant celles qui satisfont à la condition précédente, et $F(x)$ désignant la fonction

$$F(x) = \int_1^x y dx,$$

déterminer, d'une manière précise, ce que devient la fonction $\Phi(x)$, lorsque x devient infini.

I. Pour étudier la variation de

$$y = \sqrt[3]{x^2(x-6)},$$

calculons la dérivée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{\sqrt[3]{x(x-6)^2}};$$

on a alors le Tableau de variation suivant :

$x.$	$\frac{dy}{dx}.$	$y.$
$-\infty$	1	$-\infty$
	+	croît
0	$\frac{+\infty}{-\infty}$	0
	—	décroît
4	0	$-2\sqrt[3]{4}$ (min.)
	+	croît
$+\infty$	1	$+\infty$

La courbe représentative se déduit immédiatement de ce Tableau.

En extrayant la racine cubique de $x^3 - 6x^2$, on a

$$y = x - 2 - \frac{4}{x} + \dots,$$

qui prouve que la courbe admet pour asymptote la droite

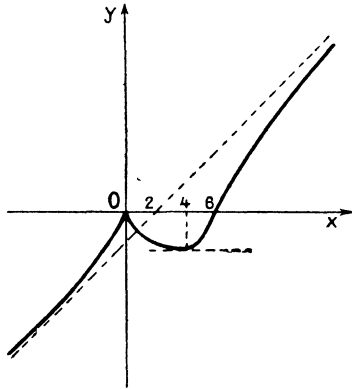
$$y = x - 2,$$

est au-dessus de cette asymptote pour $x = -\infty$, et au-dessous pour $x = +\infty$.

La courbe a un rebroussement à l'origine avec tan-

(374)

gente verticale; elle coupe Ox au point d'abscisse $x=6$. Elle a la forme ci-jointe (*fig. 4*).



II. La courbe est une cubique à rebroussement, donc *unicursale*.

Posons

$$y = tx$$

Il vient

$$x = \frac{6}{1-t^3}.$$

L'intégrale s'écrit

$$\begin{aligned} I &= \int y \, dx = \int tx \, dx = \frac{tx^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \, dt, \\ I &= \frac{18t}{(t^3-1)^2} - 18 \int \frac{dt}{(t^3-1)^2}. \end{aligned}$$

Pour décomposer $\frac{t}{(t^3-1)^2}$ en fractions simples, désignons par α une racine cubique de l'unité et posons

$$t = \theta + \alpha,$$

$$\begin{aligned} \frac{t}{(t^3-1)^2} &= \frac{1}{(\theta^3 + 3\theta^2\alpha + 3\alpha^2\theta)^2} = \frac{1}{\theta^2} \frac{1}{9\alpha + 18\theta + \dots}, \\ \frac{1}{(t^3-1)^2} &= \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{\alpha^2}{9} - \frac{2\alpha}{9}\theta + \dots \right). \end{aligned}$$

(375)

La partie relative à la racine α est donc

$$\frac{\alpha^2}{9(t-\alpha)^2} - \frac{2\alpha}{9(t-\alpha)}.$$

Les racines étant 1, j et j^2 , avec

$$1 + j + j^2 = 0,$$

on a donc, en faisant $\alpha = 1$, $\alpha = j$ et $\alpha = j^2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(t^3-1)^2} = & \frac{1}{9} \left[\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{j^2}{(t-j)^2} + \frac{j}{(t-j^2)^2} \right] \\ & - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{t-1} + \frac{j}{t-j} + \frac{j^2}{t-j^2} \right). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^3-1)^2} = & -\frac{1}{9} \left(\frac{1}{t-1} + \frac{j^2}{t-j} + \frac{j}{t-j^2} \right) \\ & - \frac{1}{9} \log(t-1)^2 - \int \frac{t+2}{t^2+t+1} dt. \end{aligned}$$

Toutes simplifications faites, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^3-1)^2} = & -\frac{1}{3} \frac{t}{t^3-1} + \frac{1}{9} \log \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} \\ & + \frac{2\sqrt{3}}{9} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

On en conclut

$$I = \frac{18t}{(t^3-1)^2} + \frac{6t}{t^3-1} - 2 \log \frac{t^3-1}{(t-1)^3} - 4\sqrt{3} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}}$$

ou

$$\begin{aligned} \int y \, dx = & \frac{xy}{2} - y + 2 \log \left| \left(\frac{y}{x} - 1 \right)^3 x \right| \\ & - 4\sqrt{3} \arctan \left(\frac{2 \frac{y}{x} + 1}{\sqrt{3}} \right) + C, \\ \int y \, dx = & \frac{xy}{2} - y - 4 \log |x| + 2 \log |(\gamma - x)^3| \\ & - 4\sqrt{3} \arctan \left(\frac{2 \frac{y}{x} + 1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

III. Remplaçons y par les premiers termes de son développement :

$$y = x - 2 - \frac{4}{x};$$

il vient

$$\int y \, dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \dots - 4 \log |x| + 2 \log \left| \left(2 + \frac{4}{x} + \dots \right)^3 \right| \\ - 4\sqrt{3} \operatorname{arc tang} \left(\frac{3 - \frac{4}{x} - \dots}{\sqrt{3}} \right),$$

les termes négligés tendant vers zéro quand x croît indéfiniment.

On peut donc écrire

$$\int y \, dx = \frac{x^2}{2} - 2x - 4 \log |x| + \Phi(x),$$

$\Phi(x)$ restant fini quand x croît indéfiniment.

On a donc

$$P = \frac{1}{2}, \quad Q = -2, \quad R = -4.$$

Ces valeurs de P, Q, R sont uniques, car, si l'on a

$$\int y \, dx = P x^2 + Q x + R \log |x| + \Psi(x),$$

on en déduit

$$\left(P - \frac{1}{2} \right) x^2 + (Q + 2)x + (R + 4) \log |x| = \Psi(x) - \Phi(x).$$

Le second membre restant fini, le premier membre ne peut rester fini que si l'on a séparément

$$P - \frac{1}{2} = 0, \quad Q + 2 = 0, \quad R + 4 = 0,$$

puisque les rapidités de croissance de x^2, x et $\log |x|$ sont différentes.

IV. On a

$$\begin{aligned} \int_3^x y \, dx &= \frac{xy}{2} - y - 4 \log |x| + 2 \log |(y-x)^3| \\ &\quad - 4\sqrt{3} \operatorname{arc tang} \left(\frac{2 \frac{y}{x} + 1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{9}{2} - 3 \\ &\quad + 4 \log 3 - 2 \log 6^3 + 4\sqrt{3} \operatorname{arc tang} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

ou, en remplaçant y par son développement,

$$\begin{aligned} \int_3^x y \, dx &= \frac{x^2}{2} - 2x - 4 \log |x| + 6 \log |2 + \varepsilon| \\ &\quad - 4\sqrt{3} \operatorname{arc tang}(\sqrt{3} + \varepsilon') + \varepsilon'' + \frac{3}{2} + 4 \log 3 \\ &\quad - 6 \log 6 + 4\sqrt{3} \operatorname{arc tang} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= 6 \log |2 + \varepsilon| - 4\sqrt{3} \operatorname{arc tang}(\sqrt{3} + \varepsilon') + \varepsilon'' \\ &\quad + \frac{3}{2} - 2 \log 3 - 6 \log 2 + 4\sqrt{3} \operatorname{arc tang} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ tendant vers zéro quand x croît indéfiniment,
on a

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = \frac{3}{2} - 2 \log 3 - 2\pi\sqrt{3}.$$