NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. ZORETTI

Sur la résolution des équations numériques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 354-361

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__354_1>

[A3g]

SUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES [1];

PAR M. L. ZORETTI,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Je me propose d'indiquer sommairement comment on peut *dans la pratique* appliquer la méthode d'approximations successives au calcul des racines des équations numériques. On sait comment M. Goursat a tiré parti de la méthode de M. Picard pour démontrer le théorème d'existence des fonctions implicites. On verra ici comment des considérations analogues, directement inspirées par le Mémoire de M. Goursat, peuvent être appliquées dans un problème pratique d'Algèbre élémentaire.

---

(1) Pendant l'impression de cet article, a paru dans les *Comptes rendus de l'Academie des Sciences* une Note de M. de Montessus sur le même sujet. Toutefois, les différences avec celle-ci sont assez nombreuses, surtout dans la méthode d'application.

I. Considérons l'équation

$$x = f(x), \tag{1}$$

$f(x)$ étant une fonction de la variable réelle x pourvue d'une dérivée. Soit x_0 une valeur approchée d'une racine de cette équation. Calculons successivement les nombres

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1), \\ &\dots\dots\dots, \\ x_n &= f(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Cherchons à quelle condition le nombre x_n tend vers une valeur limite. Il suffit pour cela que la série

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots \tag{2}$$

soit absolument convergente. Or on a

$$x_n - x_{n-1} = (x_{n-1} - x_{n-2}) f'(\xi_{n-1}),$$

ξ_{n-1} désignant une valeur de x comprise entre x_{n-1} et x_{n-2}.

Par suite,

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \right| = |f'(\xi_{n-1})|.$$

Si l'on sait que la dérivée est suffisamment petite en valeur absolue dans un voisinage suffisant de la valeur x_0, on pourra donc affirmer que la série (2) est absolument convergente. On en déduit sans peine que la somme de cette série est un nombre x qui résoud l'équation (1).

Je ne précise pas davantage les conditions de convergence et me borne à faire deux remarques, les seules que j'utiliserai.

D'abord la convergence sera rapide si $f'(\xi)$ est petit en valeur absolue. En particulier, si $f'(x_0)$ est nul (et si, bien entendu, la dérivée est continue), nous serons dans de très bonnes conditions.

Supposons de plus que $f'(x)$ soit négative au voisinage de x_0. Alors le rapport

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

est négatif. La série (2) est alternée. Nous obtenons donc successivement des valeurs approchées par défaut et par excès de la racine. Dans ce cas, auquel, on va le voir, nous nous ramènerons toujours, je précise les conditions de convergence : il suffit que la dérivée f' soit constamment inférieure à 1 en valeur absolue dans l'intervalle $x_0 x_1$ (et x_1 est voisin de x_0).

II. Soit donnée l'équation

$$\varphi(x) = 0 \tag{3}$$

que nous supposerons admettre une racine et une seule dans l'intervalle $x_0\, x'$. Nous allons mettre l'équation (3) sous la forme (1) et dans les conditions les plus favorables pour le calcul.

L'équation (3) est équivalente à l'équation

$$x = \frac{\varphi(x)}{A} + x,$$

A étant une constante.

Déterminons cette constante de façon que la fonction

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{A} + x$$

ait sa dérivée nulle pour $x = x_0$. Cela donne évidemment

$$A = -\varphi'(x_0).$$

Supposons A ainsi choisi (et non nul). Nous pourrons alors appliquer le procédé précédent de calcul de la racine, pourvu que

$$\left|1 - \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(x_0)}\right| < 1.$$

Cela impose que $\frac{\varphi'(x)}{A}$ soit négatif : ce rapport est égal à -1 pour $x = x_0$. Je supposerai qu'il ne change pas de signe dans l'intervalle $x_0 x'$. Il faut encore que le même rapport ne soit pas inférieur à -2 : on peut supposer encore cette condition remplie si la dérivée seconde φ'' n'est pas trop grande et l'intervalle $x_0 x$ assez petit.

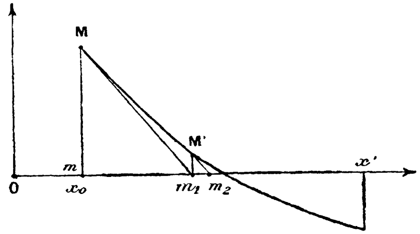
III. Voyons maintenant à laquelle des deux valeurs $x_0 x'$ il convient d'appliquer le procédé. Je me baserai pour cela sur la signification géométrique de la méthode.

Soit (*fig.* 1) la courbe

$$y = \frac{\varphi(x)}{A} = g(x);$$

on a $g'(x_0) = -1$. La tangente au point x_0 est donc

Fig. 1.



parallèle à la seconde bissectrice (en supposant les deux échelles identiques). On a d'abord

$$x_1 = x_0 + g(x_0) = \overline{Om} + \overline{mM},$$

Or, en appelant m_1 le point de rencontre de la tangente avec l'axe Ox, on a

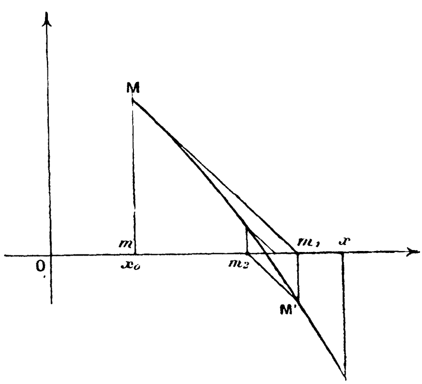
$$\overline{mM} = \overline{mm_1},$$

et, par suite,

$$x_1 = \overline{Om} + mm_1 = \overline{Om_1}.$$

Menons ensuite par M′ la parallèle $M'm_2$ à la seconde bissectrice; nous avons la deuxième valeur approchée $x_2 = \overline{Om_2}$, et ainsi de suite. On reconnaît sans peine : 1° que la méthode se confond avec celle de Newton pour le calcul de x_1; 2° en examinant les différents cas de figure, on voit que si $g(x)g''(x) > 0$ la méthode est moins avantageuse que celle de Newton, et au contraire, si $g(x)g''(x) < 0$ (*fig.* 2), on obtient des valeurs approchées alternativement par excès et par défaut. Ceci est facile à retrouver algébriquement. Nous avons dit, en effet, que la série (2) est alternée quand la dérivée f' est négative. Supposons, par exemple, $g(x_0) > 0$ et $x_0 < x'$; la dérivée f' est nulle pour x_0,

Fig. 2.



négative ensuite; elle doit donc décroître et f'' doit être négative. De même, si $g(x_0) < 0$, on devra avoir

$f'' > 0$. En d'autres termes, il faut que gf'' soit négatif.

Or

$$g(x) = f(x) - x$$

donne

$$g''(x) = f''(x)$$

et l'on a bien la condition annoncée

$$g(x)\, g''(x) < 0.$$

Si nous remarquons maintenant que

$$g(x)\, g''(x) = \frac{\varphi(x)\, \varphi''(x)}{A^2},$$

nous voyons qu'il y a tout intérêt en définitive à appliquer la méthode précédente de préférence (mais ça n'est pas indispensable) à celle des deux valeurs approchées x_0, x' qui rend $\varphi(x)\, \varphi''(x) < 0$, c'est-à-dire à celle à laquelle on a l'habitude de ne pas appliquer la méthode de Newton.

IV. Il me reste maintenant à évaluer l'erreur commise par l'application de la méthode et à la comparer au point de vue pratique avec celle de Newton.

Soient x la racine, x_n, x_{n-1} deux valeurs consécutives données par la méthode; on a

$$x = f(x),$$
$$x_n = f(x_{n-1});$$

donc

$$x - x_n = f(x) - f(x_{n-1}) = (x - x_{n-1}) f'(\xi_n).$$

L'erreur commise à la $n^{\text{ième}}$ approximation est donc le produit de l'erreur précédente par la dérivée prise pour une valeur voisine de x ou x_{n-1}. On remplacera évidemment f' par une limite supérieure de son module de x_n à x_{n-1}.

Dans la méthode de Newton, en appelant h l'erreur de la $n - 1^{\text{ième}}$ opération, l'erreur de la suivante est

$$\frac{h^2 f''}{2f'}.$$

D'où deux conséquences : 1° la méthode d'approximations successives *paraît* bien moins avantageuse, à cause du facteur h^2 de l'expression précédente, tandis que dans la première formule d'erreur le facteur h n'est qu'à la première puissance; 2° quand la dérivée f' est petite par rapport à f'', la méthode de Newton n'est plus très avantageuse; au contraire, dans la méthode précédente, nous ramenons toujours f' à être petit et l'on peut dire que cette méthode a l'avantage de donner toujours à peu près le même résultat quelle que soit la fonction $\varphi(x)$.

Voyons maintenant si l'infériorité systématique que je viens de signaler ne serait pas plus apparente que réelle. D'ordinaire, au lieu de calculer l'erreur dans l'emploi de la méthode de Newton, on préfère employer simultanément la méthode d'interpolation; on obtient ainsi deux valeurs approchées de sens contraire, l'erreur gardant la même expression que tout à l'heure. Supposons alors que nous appliquions la méthode d'approximations successives de façon à avoir des valeurs approchées alternativement par défaut et par excès; nous serons bien dans les deux cas dans des conditions comparables. Or, si après une première application de la méthode l'erreur est proportionnelle à h, après deux applications elle sera proportionnelle à h^2, et l'on voit que les méthodes sont aussi avantageuses l'une que l'autre.

Il ne reste à les comparer qu'au point de vue de la simplicité des calculs. La méthode d'approximations successives demande quelques calculs préalables bien simples qui n'existent pas dans les autres méthodes; mais ensuite les calculs successifs sont plus rapides, puisqu'il faut calculer simplement f au lieu de f, f' et $\frac{f}{f'}$ par exemple. C'est donc bien là une méthode pratique; on peut d'ailleurs s'en rendre compte par des exemples que je ne veux pas développer ici.