

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 245-248

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__245_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2091.

(1908, p. 96.

Le nombre n étant supposé impair, démontrer que, si l'on évalue la quantité $\frac{\sin nx}{\sin x}$ en fonction de $\cos x$, l'expression obtenue est un produit de deux facteurs rationnels. Que représente chacun de ces facteurs ?

(G. F.)

SOLUTION

Par l'AUTEUR.

La solution insérée au précédent Volume (p. 575) est erronée. Il faut entendre ici par facteurs rationnels des facteurs à coefficients rationnels, et les deux facteurs indiqués ne vérifient pas cette condition.

Si l'on écrit

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \sqrt{\frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x}} \sqrt{\frac{1 + \cos nx}{1 + \cos x}},$$

on reconnaît aisément que, pour n impair, chacune des deux quantités placées sous un radical s'exprime en fonction de $\cos x$ par un polynôme à coefficients rationnels qui est un carré parfait, et la question se trouve ainsi complètement résolue.

On a, par exemple,

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = (4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1)(4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1);$$

les racines du premier facteur sont

$$\cos \frac{2\pi}{5}, \quad \cos \frac{4\pi}{5},$$

et celles du second facteur sont

$$\cos \frac{2\pi}{5}, \quad \cos \frac{\pi}{5}.$$

AUTRE SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Posons

$$n = 2m + 1.$$

On a

$$\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} = \frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \frac{\cos(2m+1)\frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}.$$

Mais

$$\frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p C_{2m+1}^{2p+1} \cos^{2m-2p} \frac{x}{2} \sin^{2p} \frac{x}{2},$$

$$\frac{\cos(2m+1)\frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p C_{2m+1}^{2p} \cos^{2m-2p} \frac{x}{2} \sin^{2p} \frac{x}{2}.$$

Remplaçant dans ces expressions $\cos^2 \frac{x}{2}$ et $\sin^2 \frac{x}{2}$ par leurs expressions en fonction de $\cos x$, on a finalement

$$\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} = \left[\frac{1}{2^m} \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p C_{2m+1}^{2p+1} (1 - \cos x)^p (1 + \cos x)^{m-p} \right] \\ \times \left[\frac{1}{2^m} \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p C_{2m+1}^{2p} (1 - \cos x)^p (1 + \cos x)^{m-p} \right].$$

2104

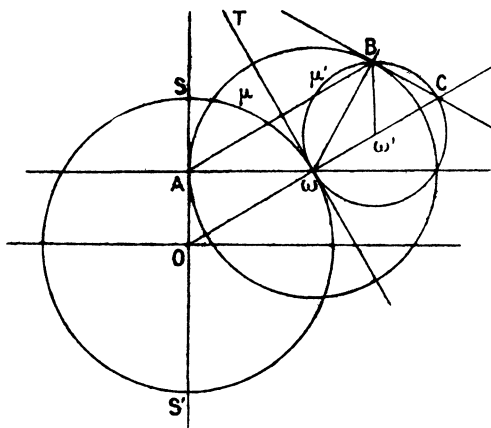
(1908, p. 479.)

Étant donnée une ellipse de demi-axes R et $2R$, le cercle ayant pour diamètre une demi-corde parallèle au grand axe enveloppe une épicycloïde à deux rebroussements.

SOLUTION

Par M. R. BOUYAIST.

Le lieu du milieu des demi-cordes parallèles au grand axe



dans l'ellipse considérée est le cercle G de rayon R concentrique à l'ellipse. Soit ω l'un des cercles envisagés; il touche

son enveloppe au point B symétrique de son point de contact A avec le petit axe de l'ellipse par rapport à la tangente au cercle G en ω . La tangente en B au cercle ω coupe O ω en C ; le triangle ω BC est égal au triangle ω AO ; par suite,

$$\omega C = O\omega = R.$$

Soit ω' le centre du cercle décrit sur ωC comme diamètre ; $\widehat{\omega\omega'B} = 2$ fois l'angle $\widehat{AO\omega}$: par suite, les arcs $\widehat{S\mu\omega}$ et $\widehat{\omega\mu'B}$ sont égaux, et le lieu du point B, enveloppe du cercle ω , est l'épicycloïde à deux rebroussements engendrée par un point du cercle ω' roulant sur le cercle O, les deux rebroussements étant S et S'.

Autres solutions par MM. G. PELISSIER, LEZ, ROSE, TÊTU.