

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 175-177

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__175_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

Un abonné. — Un lecteur du Journal a rappelé, l'an dernier, cette remarque de Sylvester : Étant donné un tétraèdre, si F , G , H , K désignent les expressions des carrés des aires des faces en fonction des arêtes, la norme de l'expression

$$\sqrt{F} + \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K},$$

soit

$$N = (\sqrt{F} + \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K})(\sqrt{F} + \sqrt{G} - \sqrt{H} - \sqrt{K})(\dots)(\dots) \\ \times (-\sqrt{F} + \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K})(\sqrt{F} - \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K})(\dots)(\dots),$$

contient en facteur l'expression V^2 du carré du volume en fonction des arêtes, *puisque l'hypothèse* $N = 0$ *entraîne la conclusion* $V = 0$.

Sylvester, considérant la formule

$$288 V^2 = \begin{vmatrix} 0 & \overline{ab}^2 & \overline{ac}^2 & \overline{ad}^2 & 1 \\ \overline{ba}^2 & 0 & \overline{bc}^2 & \overline{bd}^2 & 1 \\ \overline{ca}^2 & \overline{cb}^2 & 0 & \overline{cd}^2 & 1 \\ \overline{da}^2 & \overline{db}^2 & \overline{dc}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

et observant que les mineurs principaux sont, à un même facteur numérique près, F, G, H, K et une expression qu'il n'y a pas lieu de considérer, affirme, sans le démontrer, que le fait en question correspond à une propriété générale des déterminants symétriques dont la diagonale principale est formée d'éléments nuls. M. Thomas Muir, écartant cette restriction, a confirmé comme il suit l'affirmation de Sylvester (*Transactions of the South African Philosophical Society*, Vol. XVI; *The Messenger of Mathematics*, new series, n° 435; 1907).

Soit le déterminant symétrique

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (a_{ij} = a_{ji});$$

si l'on a

$$\Delta = 0,$$

on a entre les premiers mineurs les relations

$$A_{11}A_{22} = A_{12}^2, \quad A_{11}A_{33} = A_{13}^2, \quad \dots, \quad A_{11}A_{nn} = A_{1n}^2$$

ou

$$\frac{A_{11}}{\sqrt{A_{11}}} = \frac{A_{12}}{\sqrt{A_{22}}} = \frac{A_{13}}{\sqrt{A_{33}}} = \dots = \frac{A_{1n}}{\sqrt{A_{nn}}};$$

on a, par suite,

$$a_{11}\sqrt{A_{11}} + a_{12}\sqrt{A_{22}} + a_{13}\sqrt{A_{33}} + \dots + a_{1n}\sqrt{A_{nn}} = 0;$$

la norme du premier membre de cette égalité contient donc Δ en facteur, et il en est de même quand on remplace $a_{11}, a_{12}, \dots$ par $a_{i1}, a_{i2}, \dots$.

Autrement : dans l'hypothèse $\Delta = 0$, le détermi-

nant

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & \dots & w \\ x & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ y & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est, au signe près, le carré de l'expression

$$x\sqrt{A_{11}} + y\sqrt{A_{22}} + \dots + w\sqrt{A_{nn}};$$

or, ce déterminant s'annule quand on donne à $x, y, \dots$ les valeurs $a_{i1}, a_{i2}, \dots$, car on peut remplacer 0 par a_{ii} , le multiplicateur Δ de cet élément étant nul, et l'on a alors un déterminant dont deux lignes parallèles sont identiques; ainsi, l'hypothèse $\Delta = 0$ entraîne la conséquence

$$a_{i1}\sqrt{A_{11}} + a_{i2}\sqrt{A_{22}} + \dots + a_{in}\sqrt{A_{nn}} = 0;$$

donc, etc.

Si l'on applique ce résultat au déterminant qui donne l'expression de la quantité 288 V^2 , avec

$$a_{i1} = a_{i2} = \dots = 1, \quad a_{is} = 0,$$

on obtient le fait signalé par Sylvester.

Mais l'étude du quotient de N par V^2 , quotient donné par Sylvester sous forme développée, reste encore à faire.