

LUCIEN GODEAUX

Sur les surfaces possédant une droite multiple

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9 (1909), p. 162-167

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__162_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M^e1 b]

SUR LES SURFACES POSSÉDANT UNE DROITE MULTIPLE;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Dans cette Note, nous donnons une démonstration simplifiée d'un théorème dû à M. G. Fouret sur le

pable en série de fonctionnelles d'ordres entiers (Comptes rendus du 18 janvier 1909).

nombre des plans tangents à une surface algébrique menés par une droite multiple de cette surface ⁽¹⁾. Ensuite, nous calculons la classe d'une telle surface.

1. Soit F une surface algébrique d'ordre n possédant comme seule singularité une droite d multiple d'ordre r ($r < n$). Soit ν le nombre de plans passant par d et touchant la surface F en un point non situé sur d .

Choisissons un plan quelconque π ne passant pas par d . Tout plan α passant par d rencontre la surface F suivant une courbe C_α d'ordre $n - r$ et le plan π suivant une droite d' . Évidemment le nombre ν cherché est égal au nombre des courbes C_α douées d'un point double, car la polaire d'ordre $n - r - 1$ d'un tel point par rapport à la C_α qui le contient peut être une droite quelconque du plan de cette courbe, en particulier d' ; donc nous devons d'abord chercher l'ordre k de la courbe K lieu des pôles des droites d' par rapport aux courbes C_α .

Le nombre k est évidemment égal au nombre de courbes C_α qui touchent le plan π ; donc, d'après une formule connue,

$$k = (n + r)(n - r - 1).$$

Les pôles d'une droite par rapport à une courbe d'ordre $n - r$ sont au nombre de

$$(n - r - 1)^2;$$

donc la courbe K rencontre la droite d en

$$(2r + 1)(n - r - 1)$$

points.

(1) Sur le nombre de plans tangents qu'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface

Pour trouver v , il nous suffira de compter le nombre de points où K rencontre F ailleurs que sur d ou dans le plan π ; on trouve

$$v = (n - r - 1)[n(n + r - 1) - 2r(r + 1)].$$

Le nombre des plans tangents menés à une surface d'ordre n par une droite multiple d'ordre r , le point de contact n'étant pas sur cette droite, est égal à

$$(n - r - 1)[n(n + r - 1) - 2r(r + 1)].$$

On connaît de nombreux cas particuliers de cette formule, notamment pour $r = n - 2$ ⁽¹⁾.

2. Rappelons un théorème de MM. Zeuthen et Segre ⁽²⁾ :

Étant donné sur une surface un faisceau rationnel de courbes de genre p , doué de σ points de base et de δ courbes à point double (simple pour la surface), le nombre

$$I = \delta - \sigma - 4p$$

ne dépend pas du faisceau considéré.

Formons l'expression I pour notre surface F par la considération des courbes C_α . Évidemment, il n'existe

(Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo, 1894, t. VIII, p. 202-208).

⁽¹⁾ L. GODEAUX, *Notes de Géométrie (Mémoires de la Soc. des Sc. de Liège, 1908, 3^e série, t. VIII)*; *A propos d'un article de M. H. Bateman (Archiv der Mathematik und Physik, 1908, 3^e série, t. XIII, p. 370)*.

⁽²⁾ G. CASTELNUOVO et F. ENRIQUÈS, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche (Annali di Matematica, 1901, 3^e série, t. VI, p. 162-225)*.

pas de points de base, puisque nous avons supposé F n'ayant que la droite multiple comme singularité; donc $\sigma = 0$. Nous venons de trouver

$$\delta = (n - r - 1)[n(n + r - 1) - 2r(r + 1)].$$

Enfin, le genre p de C_α est donné par une formule bien connue :

$$p = \frac{1}{2}(n - r - 1)(n - r - 2).$$

Donc

$$(1) \quad I = (n - r - 1)[n(n + r - 3) - 2(r^2 - 2)].$$

Considérons maintenant les sections planes de F situées dans les plans d'un faisceau et calculons l'invariant de Zeuthen-Segre au moyen de ce système de courbes. En appelant m la classe de F , on trouve

$$\delta = m \quad \text{et} \quad \sigma = n.$$

Une section plane de F contient un point multiple d'ordre r , donc équivalent à $\frac{1}{2}r(r - 1)$ points doubles, et, par suite,

$$p = \frac{1}{2}[(n - 1)(n - 2) - r(r - 1)].$$

De là, une nouvelle expression de I :

$$(2) \quad I = m - (n - r - 1)(2n + 2r - 3) - (r + 1).$$

En égalant les deux expressions de I , on trouve

$$m = (n - r - 1)[n(n + r - 1) - r(2r - 1)] + (r + 1)(n - r).$$

Une surface d'ordre n possédant comme seule singularité une droite multiple d'ordre r est de la classe

$$(n - r - 1)[n(n + r - 1) - r(2r - 1)] + (r + 1)(n - r).$$

3. Supposons que la surface F possède, sur la droite multiple d , ρ points multiples d'ordre $r + 1$. Évidemment, on a

$$\rho \leq n - r.$$

Alors l'expression (1) de l'invariant de Zeuthen-Segre doit être modifiée, car le faisceau considéré a ρ points de base. Il en résulte que la classe m de la surface F est diminuée de ρ unités.

4. Nous allons donner une application des résultats précédents aux complexes de coniques.

Soit Σ un complexe de coniques d'ordre μ et de classe ν [caractéristiques de M. Montesano (1)].

Les coniques du complexe situées dans les plans d'un faisceau engendrent une surface d'ordre $2\mu + \nu$ possédant une droite multiple d'ordre ν . D'après le théorème de M. Fouret, il y a

$$(2\mu - 1)^2(2\mu + 3\nu)$$

plans tangents à cette surface menés par la droite multiple, c'est-à-dire un nombre égal de coniques dégénérées.

Les plans des coniques dégénérées d'un complexe d'ordre μ et de classe ν enveloppent une surface de classe

$$(2\mu - 1)^2(2\mu + 3\nu).$$

5. L'extension aux hyperespaces peut se faire aisément; nous nous bornerons à donner ici le résultat.

Si l'on désigne par $\nu_{(p,n,r)}$ le nombre d'espaces linéaires à $p - 1$ dimensions tangents à une variété

(1) *Una estensione della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette* (Annali di Matematica, 1898, 3^e série, t. I, p. 313).

d'ordre n à $p - 1$ dimensions et passant par un espace linéaire à $p - 2$ dimensions multiple d'ordre r pour la variété, on a

$$v_{(p,n,r)} = (n - r - 1) [v_{(p-1,n,r)} + r(n - r - 1)^{p-2}].$$

De cette formule on tire par un calcul très simple

$$v_{(p,n,r)} = (n - r - 1)^{p-2} \{ n[n + r(p-2) - 1] - r(p-1)(r+1) \}.$$