

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 141-142

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__141_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2099.

(1908, p. 478.)

Si l'on considère les trois équations

$$(1) \quad \frac{a}{b-x} + \frac{b}{x-a} + \frac{x}{a-b} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{a}{(b-x)^2} + \frac{b}{(x-a)^2} + \frac{x}{(a-b)^2} = 0,$$

$$(3) \quad \sqrt[7]{x-a} + \sqrt[7]{b-x} = \sqrt[7]{b-a},$$

l'équation (2) du cinquième degré contient les trois racines de l'équation (1).

Les deux autres racines de (2) sont racines doubles de l'équation (3) qui a six racines. (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. J. ROSE.

Les équations (1) et (2) s'écrivent encore

$$(1') \quad \begin{cases} x^3 - (a+b)x^2 - (a^2 + b^2 - 3ab)x \\ \quad + (a+b)(a-b)^2 = 0, \end{cases}$$

$$(2') \quad \begin{cases} x^5 - 2(a+b)x^4 + (a^2 + b^2 + 4ab)x^3 \\ \quad + (a+b)(a^2 + b^2 - 4ab)x^2 \\ \quad - [2(a-b)^2(a^2 + b^2) - a^2b^2]x \\ \quad + (a^3 + b^3)(a-b)^2 = 0. \end{cases}$$

Or le premier membre de (2') est égal au premier membre de (1') multiplié par l'expression

$$x^2 - (a+b)x + a^2 + b^2 - ab$$

qui s'annule pour

$$(4) \quad x = \frac{(a+b) \pm (a-b)\sqrt{3}}{2}.$$

(142)

Donc l'équation (2) contient les racines de (1).

Pour résoudre l'équation (3), on pose

$$x - a = y^7, \quad b - x = z^7, \quad b - a = c^7;$$

on est ainsi ramené au système

$$y + z = c, \quad y^7 + z^7 = c^7;$$

Or, on a successivement

$$y^7 + z^7 = (y + z)^7 - 7yz(y + z)^5 \\ + 14y^2z^2(y + z)^3 - 7y^3z^3(y + z)$$

ou

$$c^7 = c^7 - 7yzc^5 + 14y^2z^2c^3 - 7y^3z^3c$$

ou

$$yz(yz - c^2)^2 = 0,$$

qui se décompose en

$$y = 0, \quad z = 0, \quad yz = c^2.$$

Les deux premières donnent

$$x = a, \quad x = b,$$

et la troisième donne l'équation comptée deux fois

$$(x - a)(b - x) = (b - a)^2.$$

Or, cette dernière admet pour racines les valeurs (4). Donc les racines doubles de (3) sont les racines de (2) qui ne satisfont pas à (1). De plus, l'équation (3) a six racines.