

R. BRICARD

**Sur les quadriques circonscrites
à deux sphères**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 128-134

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__128_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[L'21 c]

SUR LES QUADRIQUES CIRCONSCRITES A DEUX SPHÈRES;

PAR M. R. BRICARD.

1. J'ai démontré antérieurement (1) le théorème suivant :

Si une droite varie en touchant constamment deux quadriques homofocales, les plans tangents menés par cette droite aux diverses quadriques homofocales aux deux premières forment un faisceau de grandeur constante.

Je me propose de démontrer dans cette Note une propriété toute semblable relative aux quadriques circonscrites à deux sphères et dont voici l'énoncé :

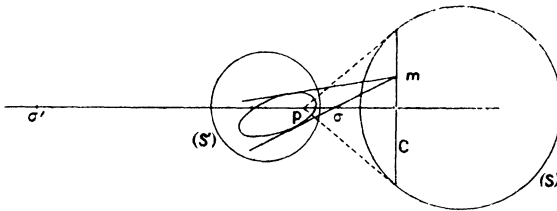
Si une droite varie en touchant constamment deux sphères, les plans tangents menés par cette droite aux diverses quadriques (nécessairement de révolution) circonscrites à ces deux sphères forment un faisceau de grandeur constante.

(1) *Nouvelles Annales*, 1908, p. 21.

La démonstration de ce théorème est, comme on va le voir, tout à fait analogue à celle du premier.

2. Soient (S) et (S') deux sphères, (Q) l'une quelconque des quadriques de révolution qui sont circonscrites à ces deux sphères (*fig. 1*). Remarquons en pre-

Fig. 1.



mier lieu que la quadrique (Q) est complètement déterminée si l'on se donne le plan de son parallèle de contact C avec la sphère (S) . Soit en effet m un point de ce parallèle. Les génératrices de (Q) qui passent par m sont nécessairement les deux tangentes menées de m au cercle suivant lequel le plan tangent à (S) coupe la sphère (S') . (Q) est engendrée par l'une ou l'autre de ces tangentes tournant autour de la ligne des centres des deux sphères (il est clair que les deux tangentes, étant symétriques par rapport au plan mené par m et la ligne des centres, engendrent la même quadrique).

On définira donc sans ambiguïté la quadrique (Q) au moyen d'un paramètre λ correspondant d'une façon univoque à la position du plan du cercle C . Je choisirai ce paramètre de la façon suivante : soient p le pôle du plan du cercle C par rapport à la sphère (S) , et σ , σ' les centres de similitude des deux sphères. On

posera

$$\frac{p\sigma}{p\sigma'} = \lambda.$$

On voit que si $\lambda = 0$ ou ∞ , la quadrique (Q) devient l'un des deux cônes de révolution circonscrits à (S) et à (S').

Soit maintenant D une droite fixe, tangente commune à (S) et (S'). Par D faisons passer un plan variable (P), auquel on fait correspondre d'une façon univoque un paramètre μ . On peut s'arranger de manière que le paramètre μ prenne les valeurs 0 et ∞ quand le plan (P) passe respectivement par les points σ et σ' . Cherchons de quelle forme doit être la relation

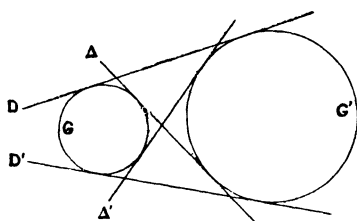
$$(1) \quad f(\lambda, \mu)$$

reliant entre eux les paramètres λ et μ d'une quadrique (Q) et d'un plan (P) assujettis à être tangents entre eux.

Tout d'abord à une quadrique (Q) correspondent deux plans (P). La relation (1) est donc du second degré en μ . En second lieu, je dis que cette relation est du premier degré en λ . Il faut, pour le faire voir, montrer qu'il existe une seule quadrique (Q) tangente à un plan (P) passant par une droite D. Soient en effet (*fig. 2*) G et G' les cercles suivant lesquels le plan (P) coupe les sphères (S) et (S'). La quadrique (Q) doit couper le plan (P) suivant deux génératrices qui, devant toucher (S) et (S'), sont des tangentes communes à G et G'. D est l'une de ces tangentes communes. Appelons D' celle des autres tangentes communes qui coupe D en l'un des centres de similitude des deux cercles G et G'. D et D' engendrent, en tournant autour de la ligne des centres des deux sphères, une même

quadrique qui ne dépend pas du plan (P) et qui ne doit pas être considérée comme répondant à la question. La quadrique (Q) cherchée est donc nécessairement

Fig. 2.



engendrée par la rotation de l'une ou l'autre des deux autres tangentes communes Δ et Δ' , et cette quadrique est bien unique.

Il est donc établi que la relation (1) est du premier degré en λ et du second degré en μ . Cette relation est de la forme

$$(2) \quad A\mu^2 + 2B\mu + C = 0,$$

A, B et C étant du premier degré en λ . Les deux valeurs de μ qui correspondent à une même valeur de λ deviendront égales si λ satisfait à la relation du second degré

$$(3) \quad B^2 - AC = 0.$$

Or, les deux plans (P) qui correspondent à une même quadrique (Q) ne peuvent être confondus que dans deux cas : d'abord si la quadrique (Q) est tangente à la droite D. Mais le raisonnement même qui précède montre que cela ne peut avoir lieu que si la quadrique (Q) contient la droite tout entière, cas à exclure. En second lieu, les deux plans seront confondus si la quadrique (Q) dégénère en un cône,

c'est-à-dire si le point p de la figure 1 vient en l'un des centres de similitude σ et σ' . La relation (3) a donc pour racines, d'après la manière dont le paramètre λ a été choisi, 0 et ∞ .

Pour chacune des quadriques particulières dont il s'agit, les deux plans (P) viendront se confondre avec le plan qui passe par le centre de similitude correspondant; les racines doubles de l'équation (2) en μ , correspondant aux valeurs 0 et ∞ de λ sont donc respectivement 0 et ∞ . Il est bien facile de conclure de là que la relation (1) est nécessairement de la forme

$$(4) \quad \mu^2 = K\lambda,$$

K étant une constante.

Soit alors D_1 une autre tangente commune aux deux sphères (S) et (S'). Par D_1 menons un plan tangent (P_1) à la quadrique variable (Q) et soit μ_1 le paramètre de ce plan, défini comme celui du plan (P). On a entre μ_1 et λ la relation

$$\mu_1^2 = K_1\lambda,$$

K_1 étant une nouvelle constante; d'où, par comparaison avec la relation (4),

$$\mu_1 = \pm \sqrt{\frac{K_1}{K}} \mu.$$

Ainsi (P) et (P_1) engendrent des faisceaux homographiques.

Parmi les quadriques (Q) circonscrites aux sphères (S) et (S') (quadriques qui doivent être considérées au point de vue *tangentiel*) figurent celles qui sont dégénérées en coniques : ce sont le cercle Γ commun aux deux sphères (S) et (S') et l'ombilicale. La considération de cette dernière prouve que, dans les fais-

ceux homographiques engendrés par (P) et (P_1) , les plans isotropes se correspondent. Autrement dit *ces faisceaux sont égaux*. On voit aussi que les plans tangents issus de D et de D_1 au cercle Γ se correspondent.

La forme de la relation (4) met un autre fait en évidence : *les paramètres des deux plans tangents issus de D à une même quadrique (Q) sont opposés*. Cela veut dire que ces deux plans engendrent des faisceaux en involution dont les plans doubles sont ceux qui passent par les points σ et σ' . Les plans isotropes issus de D se correspondant dans cette involution, les deux plans doubles sont rectangulaires et sont les plans bissecteurs de l'un quelconque des dièdres formés par les plans tangents issus de D à une même quadrique.

On peut résumer toute cette étude en énonçant les théorèmes suivants :

Soient S et S' deux sphères, D une tangente quelconque commune à ces deux sphères. Considérons les diverses quadriques (Q) circonscrites à la fois à ces deux sphères. Les plans tangents issus de D à toutes les quadriques de ce système font deux à deux des angles indépendants de la position de la droite D ; autrement dit, quand cette droite varie en restant tangente aux deux sphères, le faisceau formé par les plans tangents issus de D à toutes les quadriques (Q) constitue une figure de grandeur invariable.

Les plans bissecteurs des plans tangents issus de D à une même quadrique (Q) passent par les centres de similitude des deux sphères.

En particulier les plans tangents issus de D au

cercle commun aux deux sphères forment un dièdre de grandeur constante et ses deux plans bissecteurs passent par les deux centres de similitude.

3. Pour compléter cette étude, je montrerai que *l'angle des deux plans dont il est question dans la dernière partie de cet énoncé est précisément égal à l'angle des deux sphères.*

Il ne serait pas difficile d'établir analytiquement ce résultat. Je préfère en donner une démonstration géométrique, qui m'a été indiquée par M. Fouché, à qui j'avais communiqué le résultat qui précède.

Soit m le point de contact de la droite D et de la sphère (S) . Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant comme pôle le point m .

La sphère (S') devient une sphère (Σ') . La sphère (S) devient un plan (Π) parallèle à la droite D , que la transformation change en elle-même.

Les deux plans tangents menés par D au cercle commun aux sphères (S) et (S') sont également changés en eux-mêmes. Ils sont tangents au cercle commun à la sphère (Σ') et au plan (Π) .

Or l'angle de ces deux plans est manifestement égal à l'angle de la sphère (Σ') et du plan (Π) , comme on le voit tout de suite en faisant une projection orthogonale de la figure sur un plan perpendiculaire à D .

Comme l'angle de la sphère (Σ') et du plan (Π) est égal à l'angle des deux sphères (S) et (S') , le théorème énoncé se trouve établi.
