NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FRÉCHET

Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 97-116

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__97_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[Q1a]

ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A UNE INFINITÉ DE COORDONNÉES;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Dans une communication au Congrès international des Mathématiciens de 1900 ([1]) M. Padoa a fait connaître qu'on pourrait définir tous les symboles qu'on rencontre dans la géométrie euclidienne à l'aide de deux seulement d'entre eux. Ces deux derniers sont les suivants : 1° le symbole *point;* 2° le symbole $(a, b) = (c, d)$, où a, b, c. d sont des points et qu'on doit lire : le couple de points a, b *est superposable* au couple de points c, d. D'après M. Padoa, on obtient la géométrie euclidienne quand on donne au symbole point la signification géométrique habituelle et au symbole $(a, b) = (c, d)$ le sens suivant : le couple de points *géométriques* a, b est superposable au couple de points *géométriques* (c, d). Mais il est bien entendu qu'on peut donner aux deux symboles non définis une signification quelconque et qu'alors les définitions suivantes s'appliqueront toujours, moyennant certains postulats.

Je me suis proposé de montrer qu'en donnant aux deux symboles non définis une signification que je vais préciser tout à l'heure, on obtient une généralisation remarquable de la géométrie analytique à trois dimensions. Cette étude me paraît présenter un intérêt :

([1]) *Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne* (*Comptes rendus du Congrès,* p. 353).

d'une part, en ce qui concerne les fondements de la Géométrie; d'autre part, dans la théorie des fonctions, comme je le montrerai plus loin.

Définition d'un point. — *Nous appellerons* point *une suite infinie de nombres* réels $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *qui seront, par définition, les coordonnées de rangs* 1, 2, ..., n, ... *du point et tels que la série* $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots$ *soit convergente* (1).

Nous considérerons deux points comme distincts si leurs coordonnées de même rang ne sont pas toutes respectivement égales. Dans le cas contraire, les deux points coïncident et l'on voit que : 1° si a coïncide avec b, b coïncide avec a; 2° si a coïncide avec b et b avec c, a coïncide avec c.

Nous aurons à utiliser, pour la suite, la remarque suivante :

Si les séries à termes réels

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+\ldots,$$
$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2+\ldots$$

sont convergentes, il en est de même de la série

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n+\ldots.$$

Cela résulte immédiatement de l'inégalité évidente

$$|x_1y_1|+\ldots+|x_ny_n| \leqq \frac{x_1^2+\ldots+x_n^2+y_1^2+\ldots+y_n^2}{2}.$$

On en déduit facilement que, si $x_1, x_2, \ldots;$

(1) Cette définition provient d'une définition de M. Hilbert, modifiée par M. Riesz ; elle correspond dans la théorie des fonctions à l'introduction de la convergence *en moyenne* étudiée par M. Fischer. J'avais déjà étudié dans ma Thèse une autre définition de l'espace à une infinité de dimensions.

$y_1, y_2, \ldots; \ \ldots, u_1, u_2, \ldots$ peuvent être considérés comme les coordonnées de certains points $x, y, \ldots, u$ au sens indiqué plus haut, il en sera de même des nombres

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \ldots + \delta u_1, \quad \alpha x_2 + \beta y_2 + \ldots + \delta u_2, \quad \ldots,$$

où $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ sont des constantes réelles quelconques. Nous désignerons alors le point correspondant par la notation : $\alpha x + \beta y + \ldots + \delta u$, où $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ sont des nombres et $x, y, \ldots, u$ des points.

Définition de la distance. — Il est facile aussi de déduire de la remarque précédente que, si les séries $\sum x_i^2$, $\sum y_i^2$ convergent, il en est de même de $\sum (x_i - y_i)^2$.

Nous appellerons alors *distance* des deux points $x : (x_1, x_2, \ldots)$ et $y : (y_1, y_2, \ldots)$ la quantité bien définie positive ou nulle

$$(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots}.$$

On voit que : 1° $(x, y) = (y, x)$; 2° la condition nécessaire et suffisante pour que deux points coïncident est que leur distance soit nulle; 3° quels que soient les points x, y, z, on a

$$(x, y) \leqq (x, z) + (y, z)$$

et, par conséquent (en permutant x, y, z),

$$(x, y) \geqq |(x, z) - (y, z)| \quad (^1).$$

---

(1) Ceci permet de considérer (x, y) comme l'*écart* de x et y au sens défini dans ma Thèse [*Sur quelques points du calcul fonctionnel* (*Rendiconti del Circolo di Palermo,* 1906)] et, par conséquent, d'appliquer les théorèmes généraux qui y sont démontrés.

Alors nous adopterons pour le deuxième symbole non défini de M. Padoa la signification suivante :

Le couple de points a, b sera superposable au couple de points c, d si les distances (a, b), (c, d) *sont égales,* de sorte qu'on représentera ces deux circonstances identiques par le même symbole

$$(a, b) = (c, d).$$

Cette définition satisfait à la condition évidemment nécessaire que, si a, b coïncident, il en est de même de c, d, et réciproquement.

Nous allons maintenant suivre pas à pas les définitions de M. Padoa et en donner la traduction analytique qu'on obtient immédiatement pour quelques-unes, d'une façon moins simple pour d'autres.

Définition I. — *Si a, b sont des points distincts,* « *droite ab* » signifie : *figure à laquelle appartient chaque point x tel qu'il n'existe aucun point y distinct de x qui vérifie simultanément les conditions*

$$(a, y) = (a, x), \qquad (b, y) = (b, x).$$

Soient $a_1, a_2, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots$ les coordonnées des points a, b. Les quantités $(b_1 - a_1)$, $(b_2 - a_2)$, ... ne seront pas toutes nulles ; soit, par exemple, $b_k - a_k \neq 0$. Appelons F la figure formée par tous les points dont les coordonnées peuvent s'écrire sous la forme

$$(1) \qquad a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \quad a_2 + \lambda(b_2 - a_2), \quad \ldots,$$

où λ désigne une constante réelle quelconque. Autrement dit, appelons F l'ensemble des points vérifiant les équations

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots,$$

dans lesquelles on prendra par convention le numérateur égal à zéro, quand le dénominateur sera nul.

Je veux démontrer que la *droite ab* existe et coïncide avec F.

Pour démontrer que la droite ab existe, il suffit de prouver qu'il y a des points satisfaisant à la définition I. Or, il suffit de remarquer que, si y est distinct de a, on a

$$(a,y) > 0, \qquad (a,a) = 0;$$

donc on n'a pas

$$(a,y) = (a,a).$$

Par suite, a est un point de la droite ab ; de même pour b. On voit d'ailleurs immédiatement que a, b font aussi partie de F.

Je dis maintenant que, si x n'est pas sur F, il existe au moins un point $y \neq x$, tel qu'on ait, à la fois,

$$(a,y) = (a,x), \qquad (b,y) = (b,x).$$

Pour cela, prenons pour y un point dont les coordonnées sont de la forme

$$\begin{aligned} y_1 &= 2a_1 - x_1 + 2\mu(b_1 - a_1), \\ y_2 &= 2a_2 - x_2 + 2\mu(b_2 - a_2), \\ &\ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où μ est une constante réelle. Ce point est certainement distinct de x, quel que soit μ, sans quoi x serait de la forme

$$a + \mu(b - a)$$

et, par suite, serait sur F.

Or, on a

$$(y,a)^2 - (x,a)^2 = 4\mu\left[\mu\sum(b_i - a_i)^2 + \sum(a_i - x_i)(b_i - a_i)\right],$$

$$(y,b)^2 - (x,b)^2 = 4(\mu - 1)\left[\mu\sum(b_i - a_i)^2 + \sum(a_i - x_i)(b_i - a_i)\right],$$

et l'on peut, puisque $\sum(b_i - a_i)^2 \neq 0$, choisir μ de façon à annuler le crochet, ce qui démontre la proposition. Alors, la droite (a, b) ne comprend que des points de F.

Réciproquement, tout point de F est sur la droite ab. Pour le prouver, nous allons d'abord démontrer que, si un point c n'est pas sur la droite ab, on a

$$|(a, c) - (b, c)| < (a, b) < (a, c) + (b, c).$$

En effet, quelle que soit la position de c, on a toujours

$$|(a, c) - (b, c)| \leqq (a, b) \leqq (a, c) + (b, c);$$

il suffit donc de montrer que l'égalité

$$(a, b) = \pm (a, c) \pm (b, c) \tag{2}$$

n'est possible que si c est sur F. Or, celle-ci est équivalente à la suivante :

$$[(a, c)^2 + (b, c)^2 - (a, b)^2]^2 = 4(a, c)^2 (b, c)^2.$$

Si c a pour coordonnées $c_1, c_2, \ldots$, cette égalité peut s'écrire

$$K \equiv \left[\sum (a_i - c_i)^2\right] \left[\sum (b_i - c_i)^2\right] - \left[\sum (a_i - c_i)(b_i - c_i)\right]^2 = 0.$$

D'autre part, le premier membre est la limite de

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{i=n} (a_i - c_i)^2 \sum_{i=1}^{i=n} (b_i - c_i)^2 - \left[\sum_{i=1}^{i=n} (a_i - c_i)(b_i - c_i)\right]^2$$
$$= \sum_{i=1;\, j=1}^{i=n;\, j=n} [(a_i - c_i)(b_j - c_j) - (a_j - c_j)(b_i - c_i)]^2.$$

On voit qu'on a toujours

$$0 \leqq \sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \ldots \leqq \sigma_n \leqq \ldots \leqq K.$$

Donc, pour que K soit nul, il faut que

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \ldots = \sigma_n = \ldots = 0,$$

ce qui nécessite qu'on ait, quels que soient les entiers i, j,

$$(3) \qquad (a_i - c_i)(b_j - c_j) - (a_j - c_j)(b_i - c_i) = 0$$

ou

$$(b_i - a_i)(c_j - a_j) - (b_j - a_j)(c_i - a_i) = 0,$$

et, comme $b_k - a_k \neq 0$, on a, en prenant $j = k$,

$$c_i - a_i = (b_i - a_i)\frac{c_k - a_k}{b_k - a_k}.$$

En définitive, on voit, en posant $\lambda = \dfrac{c_k - a_k}{b_k - a_k}$, que si l'égalité (2) est vérifiée, les coordonnées du point c peuvent s'écrire

$$c_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \qquad c_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2), \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire que c est sur F. Réciproquement, si c est sur F, les égalités (3) sont vérifiées; par suite, σ_1, σ_2, ... sont nuls, donc aussi K, et l'on a l'égalité (2).

Démontrons encore un autre lemme. Considérons deux points de F distincts : y, c ; leurs coordonnées seront de la forme (1) et ils correspondront à deux valeurs distinctes : λ', λ. Un calcul simple montre alors qu'on a

$$(4) \quad \begin{cases} (y, c) = |\lambda' - \lambda|(a, b), \qquad (y, a) = |\lambda'|(a, b), \\ (y, b) = |\lambda' - 1|(a, b), \\ (c, a) = |\lambda|(a, b), \qquad (c, b) = |\lambda - 1|(a, b). \end{cases}$$

Il résulte de ce qui précède que, si c est sur F, il n'existe aucun autre point y distinct de c, tel que

$$(y, a) = (c, a), \qquad (y, b) = (c, b).$$

En effet, puisque c est sur F, on aurait, d'après les égalités (4),

$$(a,b) = \pm (a,y) \pm (b,y),$$

et y devrait être aussi sur F.

Mais alors, si λ' est la valeur de λ qui correspond à y, les égalités (4) donneraient

$$|\lambda'| = |\lambda|, \qquad |\lambda' - 1| = |\lambda - 1|,$$

d'où $\lambda = \lambda'$, et y ne serait plus distinct de c.

En résumé, nous avons démontré :

1° Que la droite ab coïncide avec F, c'est-à-dire a pour équation

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots;$$

2° Que, si c est un point de la droite ab, on a

$$(a,b) = \pm (a,c) \pm (b.c);$$

3° Que, si c n'est pas sur la droite ab, on a

$$|(a,c) - (b,c)| < (a.b) < (a,c) + (b,c).$$

Il en résulte que, si a, b, c sont trois points distincts et si c est sur ab, a est sur bc et b est sur ac; la réciproque est vraie. On saura donc maintenant distinguer si trois points sont ou non *alignés*.

Passons maintenant aux autres définitions de M. Padoa, qui vont nous permettre de décider de la position de trois points en ligne droite.

Définition II. — *Si a et b sont deux points distincts,* « *milieu de ab* » signifie : *point c de la* *droite ab, tel que*

$$(a, c) = (b, c).$$

Si c correspond à la valeur λ du paramètre, les formules précédemment démontrées prouvent qu'on devra avoir

$$|\lambda|(a, b) = |\lambda - 1|(a, b),$$

d'où

$$\lambda = \frac{1}{2},$$

et alors

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ainsi, le milieu de ab existe, est unique et est représenté par

$$c = \frac{a + b}{2}.$$

Définition III. — « *Sphère de centre a et passant par b* » signifie : *figure à laquelle appartient tout point x, tel qu'on ait*

$$(a, x) = (a, b).$$

On a immédiatement l'équation de cette sphère,

$$\sum (a_i - x_i)^2 = \sum (a_i - b_i)^2;$$

on voit qu'elle existe et comprend même une infinité de points.

Il suffit de prendre, par exemple,

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 + \cos\lambda \sqrt{\sum (a_i - b_i)^2}, \\
x_2 &= a_2 + \sin\lambda \sqrt{\sum (a_i - b_i)^2}, \\
x_3 &= a_3, \\
x_4 &= a_4, \\
&\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

où λ est un paramètre arbitraire.

Définition IV. — « *Sphère qui a pour pôles a et b* » signifie : *sphère qui a pour centre le milieu de ab et qui passe par b.*

Son équation sera donc

$$\sum\left(x_i - \frac{a_i + b_i}{2}\right)^2 = \sum\left(b_i - \frac{a_i + b_i}{2}\right)^2 = \sum\left(\frac{b_i - a_i}{2}\right)^2.$$

Pour pouvoir définir plus facilement la position d'un point sur la droite ab, nous commencerons par appeler *cosinus directeurs de la direction positive* qui va de a vers b les quantités

$$\alpha_1 = \frac{b_1 - a_1}{(a, b)}, \qquad \alpha_2 = \frac{b_2 - a_2}{(a, b)}, \qquad \dots,$$

qui, en valeur absolue, sont au plus égales à 1 et telles que

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots = 1.$$

Alors, si $c = a + \lambda(b - a)$ est un point quelconque de la droite ab, on pourra, en posant $\rho = \lambda(a, b)$, écrire ses coordonnées sous la forme

$$c_1 = a_1 + \rho\alpha_1, \qquad c_2 = a_2 + \rho\alpha_2, \qquad \dots,$$

et l'on aura évidemment

$$(c, a) = |\rho|,$$

ce qui donne la signification géométrique du paramètre $|\rho|$.

De même, posons $\mu = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$, et l'on aura

$$c_1 = \frac{a_1 + \mu b_1}{1 + \mu}, \qquad c_2 = \frac{a_2 + \mu b_2}{1 + \mu}, \qquad \dots.$$

La signification de $|\mu|$ sera donnée par la formule évidente

$$\frac{(c, a)}{(c, b)} = |\mu|.$$

Les définitions suivantes fixeront la signification géométrique des signes de ρ et de μ.

DÉFINITION V. — *Si c, d sont des points distincts sur la droite ab,* « *(c, d) n'entrelace pas (a, b)* » signifie : *la sphère de pôles a, b n'a aucun point commun avec la sphère de pôles c, d.*

Écrivons les points c, d sous la forme

$$c = \frac{a+\mu b}{1+\mu}, \qquad d = \frac{a+\mu' b}{1+\mu'}.$$

Il faudra que les équations suivantes n'aient pas de solutions communes :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \\ \sum\left(x - \frac{c+d}{2}\right)^2 = \left(\frac{c-d}{2}\right)^2 \end{array} \right.$$

ou

$$\sum(x-a)(x-b) = 0$$

et

$$\sum(x-a)^2 + (\mu+\mu')\sum(x-a)(x-b) + \mu\mu'\sum(x-b)^2 = 0.$$

Il faudra, en particulier, que l'équation

$$\sum(x-a)^2 + \mu\mu'\sum(x-b)^2 = 0$$

ne soit pas vérifiée, ce qui aura évidemment lieu si $\mu\mu' > 0$.

Cette condition suffisante est nécessaire. Il suffit de démontrer que, si $\mu\mu' \leqq 0$, les sphères (5) ont au moins un point commun.

En effet, si $\mu\mu' = 0$, elles ont évidemment en commun le point a; si $\mu\mu'$ est infini, elles ont en commun le point b.

Reste le cas où $\mu\mu'$ est fini et négatif. Appelons $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ les cosinus directeurs de la direction de a vers b et montrons d'abord qu'il existe un point X de la droite ab tel que

$$X_i = a_i + \gamma\alpha_i = b_i + \gamma'\alpha_i = c_i + \delta\alpha_i = d_i + \delta'\alpha_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots),$$

où γ, γ', δ, δ' sont quatre constantes réelles telles que

$$\delta\delta' = \gamma\gamma' < 0.$$

Pour cela il suffit de prendre $X = a + \gamma\alpha$ et de déterminer γ, γ', δ, δ' par les conditions

$$\gamma' = \gamma - \frac{b-a}{\alpha}, \qquad \delta = \gamma - \frac{c-a}{\alpha}, \qquad \delta' = \gamma - \frac{d-a}{\alpha},$$
$$\delta\delta' = \rho\rho',$$

qui deviennent

$$\gamma' = \gamma - (a, b), \qquad \delta = \gamma - \frac{\mu(a, b)}{1+\mu}, \qquad \delta' = \gamma - \frac{\mu'(a, b)}{1+\mu'}$$

et

$$\gamma[\gamma - (a, b)] = \left[\gamma - \frac{\mu(a, b)}{1+\mu}\right]\left[\gamma - \frac{\mu'(a, b)}{1+\mu'}\right].$$

D'où

$$\gamma = \frac{\mu\mu'(a, b)}{\mu\mu' - 1},$$

quantité bien déterminée, puisque $\mu\mu' - 1 < 0$.

On a bien alors

$$\gamma\gamma' = \mu\mu'\left[\frac{(a, b)}{\mu\mu' - 1}\right]^2 < 0$$

D'autre part, on peut évidemment choisir d'une infinité de manières des nombres réels β_1, β_2, ... tels que

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots = 0, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots = 1.$$

Je dis maintenant qu'on peut choisir le nombre réel t de façon que le point de coordonnées

$$x_1 = X_1 + t\beta_1, \qquad x_2 = X_2 + t\beta_2, \qquad \ldots$$

soit sur les sphères (5). En effet, on aura, d'après (6), pour ces valeurs des x_i,

$$\sum (x_i - a_i)(x_i - b_i) = t^2 + \gamma\gamma',$$

$$\sum (x_i - c_i)(x_i - d_i) = t^2 + \delta\delta',$$

et, comme $\gamma\gamma' = \delta\delta' < 0$, on pourra toujours prendre

$$t^2 + \gamma\gamma' = t^2 + \delta\delta' = 0.$$

En définitive, *pour que les points*

$$c = \frac{a + \mu b}{1 + \mu}, \qquad d = \frac{a + \mu' b}{1 + \mu'}$$

forment un couple (c, d) *qui n'entrelace pas* ab, *il faut et il suffit* que $\mu\mu'$ soit fini et positif.

Définition VI. — « *x est un point placé entre a et b* » signifie : *si m est le milieu de ab, x coïncide avec m ou est un point de la droite ab tel que mx n'entrelace pas ab.*

On a vu que

$$m = \frac{a + b}{2}$$

et que x est de la forme

$$\frac{a + \mu b}{1 + \mu}.$$

Donc, μ doit être positif, puisque m peut s'écrire

$$m = \frac{a + \mu' b}{1 + \mu'}$$

avec $\mu' = 1$ et que $\mu\mu'$ doit être positif d'après ce qu'on vient de prouver.

En définitive, pour que le point x soit placé entre a et b, il faut et il suffit qu'on puisse l'écrire sous la forme

$$x = \frac{a + \mu b}{1 + \mu},$$

où μ est un nombre fini et positif.

Ou bien encore, en posant $x = a + \rho\alpha$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ désignent les cosinus directeurs de la direction positive qui va de a vers b, il faut qu'on ait

$$0 < \rho < (a, b),$$

car on aura

$$\mu = \frac{\rho}{ab - \rho}.$$

Définition VII. — « *Segment ab* » signifie : *figure à laquelle appartiennent a, b et tout point placé entre a et b.*

D'après ce qui précède, le segment ab sera la figure formée par tous les points $x = a + \rho\alpha$, où ρ est un nombre réel tel qu'on ait

$$0 \leqq \rho \leqq (a, b).$$

Autrement dit, c'est le lieu des points x tels que

$$0 \leqq \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots \leqq 1.$$

Définition VIII. — « *Prolongement de ab vers b* » signifie : *figure à laquelle appartiennent tous les points x tels que b soit placé entre a et x.*

Il faut que

$$b = \frac{a + \mu x}{1 + \mu}$$

avec μ fini et positif.

On peut donc déterminer ρ de façon que $x = a + \rho\alpha$, en prenant

$$b = \frac{a + \mu(a + \rho\alpha)}{1 + \mu},$$

d'où

$$\rho = (a, b)\frac{1 + \mu}{\mu}$$

ou

$$\mu = \frac{(a, b)}{\rho - (a, b)}.$$

Ainsi, le prolongement de *ab* vers *b* est formé de tous les points

$$x = a + \rho\alpha$$

pour lesquels

$$\rho > (a, b).$$

Autrement dit, c'est le lieu des points x tels que

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots > 1.$$

Définition IX. — « *Rayon ab* » signifie : *figure à laquelle appartient tout point du segment ab et du prolongement de ab vers b.*

Ce sera donc l'ensemble des points $x = a + \rho\alpha$ pour lesquels $\rho \geqq 0$, ou bien le lieu des points x tels que

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots \geqq 0.$$

Définition X. — *Si c et d sont des points distincts sur la droite ab*, « *d suit c comme b suit a* » signifie : *le prolongement de ab contient le prolongement de cd ou celui-ci contient celui-là.*

Alors il faut que c, d soient des points de la droite *ab* tels que la valeur commune des rapports

$$\frac{d_1 - c_1}{b_1 - a_1} = \frac{d_2 - c_2}{b_2 - a_2} = \ldots$$

soit positive.

Définition XI. — « *Symétrique de a par rapport à b* » signifie : *point x tel que b est le centre de ax.*

On aura

$$\frac{a+x}{2} = b,$$

d'où

$$x = 2b - a;$$

le point x existe et est unique.

Définition XII. — « *ab est perpendiculaire à bc* » signifie : *b est un point de la sphère qui a pour pôles a et c.*

C'est-à dire qu'on a

$$\sum (b_i - a_i)(b_i - c_i) = 0,$$

ou encore, en appelant $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ les cosinus directeurs de la direction qui va de a vers b ou de b vers a et de la direction qui va de b vers c ou de c vers b,

$$\sum \alpha_i \beta_i = 0.$$

Définition XIII. — *Si d est un point distinct de c,* « *(c, d) est parallèle à (a, b)* » signifie : *le symétrique de a par rapport au centre de bc est un point de la droite cd.*

Autrement dit,

$$\left(2 \times \frac{b+c}{2} - a\right) = c + \lambda(d - c),$$

d'après la définition XI, ou

$$\frac{b_1 - a_1}{d_1 - c_1} = \frac{b_2 - a_2}{d_2 - c_2} = \ldots.$$

Définition XIV. — « *x est un point intérieur au triangle abc* » signifie : *x est un point distinct de a et il y a un point y du prolongement de ax qui est placé entre b et c.*

D'après ce qui précède, on aura

$$y = \frac{b + \mu c}{1 + \mu}, \qquad x = \frac{a + \lambda y}{1 + \lambda} \qquad \text{avec} \qquad \lambda > 0, \qquad \mu > 0.$$

D'où

$$x = \frac{a}{1 + \lambda} + \frac{\lambda}{(1 + \lambda)(1 + \mu)} b + \frac{\lambda \mu}{(1 + \lambda)(1 + \mu)} c$$

ou

$$x = ra + sb + tc,$$

où r, s, t sont trois nombres réels *tous positifs* et tels que

$$r + s + t = 1.$$

Définition XV. — « *x est un point intérieur à l'angle bac* » signifie : *x est un point distinct de a et il y a un point y du rayon ax qui est placé entre b et c.*

Alors

$$x = ra + sb + tc \qquad \text{avec} \qquad r + s + t = 1;$$

mais on suppose seulement que s et t sont de même signe.

Définition XVI. — « *Plan abc* » signifie : *figure à laquelle appartient tout point x tel qu'il n'existe aucun point y distinct de x vérifiant simultanément les conditions*

$$(a, y) = (a, x), \qquad (b, y) = (b, x), \qquad (c, y) = (c, x),$$

les points a, b, c étant supposés non en ligne droite.

Soit P la figure formée par tous les points x tels que

$$x = ra + sb + tc,$$

où r, s, t sont trois variables réelles quelconques assujetties seulement à la relation $r + s + t = 1$. Je dis que le plan abc existe et coïncide avec P.

Le plan abc existe, car, si y est distinct de a, on a

$$(a, y) > 0 \qquad \text{et} \qquad (a, a) = 0,$$

donc

$$(a, y) \neq (a, a);$$

par suite, le plan abc comprend bien au moins le point a et de même les points b et c.

Soit maintenant x un point de P; je dis qu'il est dans abc.

En effet, on voit facilement qu'on a, quel que soit y,

$$\begin{aligned} r[(a, y)^2 - (a, x)^2] + s[(b, y)^2 - (b, x)^2] \\ + t[(c, y)^2 - (c, x)^2] = (x, y)^2. \end{aligned}$$

Si y est distinct de x, on n'a donc pas simultanément

$$(a, y) = (a, x), \qquad (b, y) = (b, x), \qquad (c, y) = (c, x);$$

x est dans le plan abc.

Réciproquement, je dis que, si x est dans le plan abc, il est dans P.

Il suffit de prouver que, si x n'est pas dans P, on pourrait trouver un point y distinct de x tel qu'on ait simultanément

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} (a, y)^2 - (a, x)^2 = 0, \\ (b, y)^2 - (b, x)^2 = 0, \\ (c, y)^2 - (c, x)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour cela, prenons

$$y = 2(ra + sb + tc) - x \qquad \text{avec} \qquad r + s + t = 1,$$

les nombres r, s étant à déterminer par (6). Le point y est sûrement distinct de x, sans quoi celui-ci serait dans P. D'autre part, les premiers membres des équations (6) peuvent s'écrire, en posant $ra + sb + tc = u$,

$$\sum(u_i - a_i)(u_i - x_i) = 0,$$

$$\sum(u_i - b_i)(u_i - x_i) = 0,$$

$$\sum(u_i - c_i)(u_i - x_i) = 0;$$

en multipliant par r, s, t et ajoutant, on aura une identité. Si donc on prend par exemple $t \neq 0$, il suffit de satisfaire aux deux premières. Celles-ci peuvent s'écrire, en développant,

$$(r-1)(r\beta^2 + sI - H) + s(rI + s\alpha^2 - R) = 0,$$
$$(s-1)(rI + s\alpha^2 - R) + r(r\beta^2 + sI - H) = 0,$$

et posant

$$\alpha^2 = (b, c)^2, \qquad \beta^2 = (a, c^2), \qquad I = \sum(c_i - a_i)(c_i - b_i),$$

$$H = \sum(c_i - x_i)(c_i - a_i), \qquad R = \sum(c_i - x_i)(c_i - b_i).$$

On satisfera donc à ces deux équations en prenant

$$r\beta^2 + sI - H = 0, \qquad rI + s\alpha^2 - R = 0.$$

Il y a une solution unique en r et s, car le déterminant des coefficients,

$$\alpha^2\beta^2 - I^2 = \sum(b_i - c_i)^2 \sum(a_i - c_i)^2 - \left[\sum(c_i - a_i)(c_i - b_i)\right]^2,$$

est positif, d'après la démonstration donnée à propos de la définition I, puisque les trois points a, b, c ne sont pas alignés.

Le théorème est ainsi démontré.

(*A suivre*)