

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 8
(1908), p. 572-575

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__572_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2085.

(1907, p. 528.)

Soient U et V deux quadriques ayant en commun une droite γ ; soit β une génératrice de U du même système que γ , soit α une génératrice de V du même système que γ ; un plan passant par γ contient encore une génératrice x de U , une génératrice y de V ; les deux plans (x, β) et (y, β) se coupent suivant une droite z : quel est le lieu de cette droite lorsqu'on fait varier le plan mené par γ ?

(G. F.)

SOLUTION

Par M. M. TÊTU.

Les deux faisceaux de plans d'arêtes α, β sont respectivement homographiques au faisceau d'arêtes γ . Donc, l'intersection de deux plans correspondants a pour lieu une quadrique passant par α et β . De plus, cette quadrique passe par l'intersection des deux génératrices x et y , dont le lieu est la cubique gauche commune aux deux quadriques U et V , laquelle rencontre d'ailleurs en deux points chacune des droites α et β . La quadrique lieu est ainsi bien définie.

M. TÊTU.

Autres solutions de MM. BROS et TABACOFF.

2087.

(1908, p. 48.)

Intégrer l'équation différentielle

$$A(x)y'^2 - A'(x)yy' + C(x)y^2 = H(x),$$

avec la condition

$$H = CA - \frac{A'^2}{4}.$$

(573)

A et C sont des fonctions arbitraires de x. A' est la dérivée de A.

(PIERRE FAVRE.)

SOLUTION

Par M. PARROD.

On a

$$y' = \frac{A'y \pm 2\sqrt{-H(r^2 - A)}}{2A}.$$

Posons

$$y = \frac{1+t^2}{2t} \sqrt{A},$$

d'où

$$\sqrt{y^2 - A} = \frac{1-t^2}{2t} \sqrt{A}$$

et

$$y' = -\frac{(1-t^2)t'}{2t^2} \sqrt{A} + \frac{1+t^2}{4t^2} \frac{A'}{\sqrt{A}}.$$

Portons ces valeurs dans l'expression de y' et simplifions; il vient

$$\frac{t'}{t} = \frac{2\sqrt{-H}}{A};$$

donc

$$\log t = 2 \int \frac{\sqrt{-H}}{A} dx.$$

Autre solution par M. J. ROSE.

2088.

(190', p. 48.)

La tangente et la normale en un point M d'une ellipse de centre O rencontrent le grand axe en T et N : 1° la perpendiculaire abaissée de T sur OM enveloppe une ellipse; 2° la parallèle menée par N à OM est normale à une ellipse fixe.

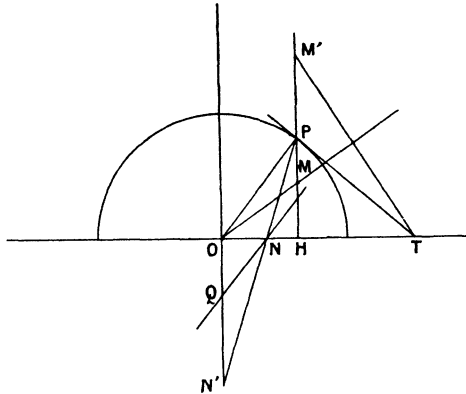
(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. TÊTÉ.

1° Soit P l'intersection de la perpendiculaire abaissée de M sur le grand axe avec le cercle directeur; soit M' son inter-

section avec la perpendiculaire abaissée de T sur OM. Les



angles $\widehat{POH}$, $\widehat{MOH}$ étant respectivement complémentaires de $\widehat{PTH}$, $\widehat{M'TH}$, on a

$$\frac{M'H}{PH} = \frac{PH}{MH} = \frac{a}{b}.$$

Donc l'enveloppe de TM' est le lieu du point M' , qui est une ellipse.

2° Considérons l'ellipse comme projection de son cercle principal; la normale en M est la projection de la droite $PN'N$, et l'on a

$$\frac{N'P}{N'N} = \text{const.}$$

Menons par N la parallèle à OP : NQ ; on a

$$\frac{NQ}{PO} = \text{const.},$$

d'où

$$NQ = \text{const.}$$

Donc cette droite enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, donc sa projection enveloppe une développée d'ellipse.

Autres solutions par MM. BETTO, BOUVAIST, BRATU, BROS, GAEBECKE, LEZ, RETALI, J. ROSE.

Le nombre n étant supposé impair, démontrer que, si l'on évalue la quantité $\frac{\sin nx}{\sin x}$ en fonction de $\cos x$, l'expression obtenue est un produit de deux facteurs rationnels. Que représente chacun de ces facteurs ?

(G. F.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

$f(\cos x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$ est, quel que soit n , une fonction rationnelle de $\cos x$; elle s'annule pour $x = \frac{K\pi}{n}$, K prenant les $n - 1$ valeurs $1, 2, \dots, n - 1$.

Si n est impair, les $n - 1$ racines de

$$f(\cos x) = 0$$

sont deux à deux opposées, puisque

$$\cos \frac{p\pi}{n} = -\cos \frac{(n-p)\pi}{n} \quad (p < n).$$

$f(\cos x)$ est par suite un produit de deux facteurs rationnels $f_1(\cos x)$ et $f_2(\cos x)$, le premier ayant pour racines

$$\cos \frac{\pi}{n}, \quad \cos \frac{2\pi}{n}, \quad \dots, \quad \cos \frac{n-1}{2n}\pi,$$

le second

$$\cos \frac{n+1}{2n}\pi, \quad \dots, \quad \cos \frac{(n-1)\pi}{n}.$$
