

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 8
(1908), p. 474-477

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__474_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1955.

(1903, p. 47.)

Étant donnés deux droites fixes rectangulaires Ox, Oy et un cercle C qui passe en O , l'enveloppe des droites dont les segments limités à Ox, Oy ont leur milieu sur le cercle est une hypocycloïde triangulaire H_3 .

Montrer géométriquement que l'enveloppe de cette courbe H_3 , quand le cercle C de rayon constant tourne autour du point O , est une hypocycloïde quadrangulaire H_4 .

(R. GILBERT).

SOLUTION

Par M. R. GILBERT.

Soit AB une droite dont le milieu M est sur C ; si P est le point de OM tel que $OP = 2OM$, le lieu du point P est un cercle de centre D diamétralement opposé au point O sur le cercle C . D'ailleurs, si E_1F sont les points où Ox, Oy coupent C' , AB est la droite de Simpson du point P par rapport au triangle OEF . Donc AB enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements, H_3 ; le cercle inscrit à cette courbe est le cercle des neuf points du triangle OEF , c'est-à-dire le cercle C .

Designons par G le point où la droite OD coupe à nouveau le cercle C' et GK la perpendiculaire abaissée sur EF .

La droite EF est une des positions de AB ; le point K est le point où elle touche H_3 . En effet, considérons une droite AB infiniment voisine de EF ; comme AB est la droite de Simpson du point P , si PQ est la perpendiculaire abaissée de P sur EF , Q est le point de rencontre de AB et EF . Donc, quand AB tend vers EF , Q tend vers le point de contact de EF avec son enveloppe, et, d'autre part, il coïncide avec le pied K de la perpendiculaire GK à EF .

On verrait de la même façon que la courbe H_3 est tangente à Ox, Oy en E_1, F . Si maintenant le cercle C de rayon constant se meut en passant constamment en O , la courbe H_3 de grandeur invariable étant tangente à Ox, Oy en E, F , le centre instantané de rotation est le point G . Mais le segment EF de longueur constante est aussi une figure invariable, et, dans le mouvement de cette figure, le centre instantané de rotation est aussi le point G ; la droite EF enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, H_4 , à laquelle elle est tangente en K . Ainsi H_3 et H_4 sont tangentes en ce point; comme d'ailleurs les autres normales menées de G à H_3 sont GE, GF , la courbe H_4 est, avec Ox, Oy , l'enveloppe de H_3 .

Remarque. — On peut résoudre de même le problème plus général suivant : *Trouver l'enveloppe d'une hypocycloïde à trois rebroussements de grandeur constante tangente à deux droites fixes quelconques Ox, Oy .*

Soient en effet S, T les points de contact sur Ox, Oy ; S'

le point de rencontre des perpendiculaires SS' à Ox et OS' à Oy ; T' le point de rencontre des perpendiculaires TT' à Oy et OT' à Ox . Le cercle C'' , circonscrit au triangle $OS'T'$, coupe Ox , Oy en E , F .

L'hypocycloïde à trois rebroussements est l'enveloppe des droites de Simpson du triangle OEF ; son cercle inscrit est le cercle des neuf points de ce triangle; il s'ensuit que le cercle C' est de grandeur constante, et par suite aussi le segment EF .

D'autre part, dans le mouvement de l'hypocycloïde, le centre instantané de rotation est le point de rencontre G de SS' , TT' ; dans le mouvement de la figure invariable EF , le centre instantané est le point G' diamétralement opposé à O sur le cercle C' ; ces deux points sont sur une même perpendiculaire GKG' à EF , car GG' est une hauteur du triangle $G'S'T'$. Donc l'enveloppe de l'hypocycloïde est la courbe enveloppe des droites EF .

2049.

(1906, p. 186.)

On joint un point O aux points I , H , K où une sécante X coupe les côtés BC , CA , AB d'un triangle ABC , et dans le faisceau O on inscrit un triangle quelconque $A_1B_1C_1$ dont les côtés B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 rencontrent la sécante en I_1 , H_1 , K_1 .

I. Les droites AI_1 , BH_1 , CK_1 sont concourantes en un point O_1 .

II. Si les droites AO , BO , CO coupent les côtés correspondants de $A_1B_1C_1$ en P_1 , Q_1 , R_1 et si les droites A_1O_1 , B_1O_1 , C_1O_1 coupent les côtés de ABC en P , Q , R , les six points P , Q , R , P_1 , Q_1 , R_1 sont situés sur une droite X_1 , et les droites X , X_1 , OO_1 sont concourantes.

(P. SONDAT.)

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

I. La sécante X coupe les côtés de ABC et les droites joignant le point O à ses sommets en six points I_1 , H_1 , K_1 et I , H , K en involution.

En considérant la droite X comme sécante dans le

triangle ABC, il résulte de cette involution que les droites AI_1 , BH_1 , CK_1 doivent être concourantes en un point O_1 .

II. Les droites qui joignent le point O aux sommets de ABC et aux points I, H, K où les côtés sont coupés par X forment un faisceau en involution. Or trois des rayons de ce faisceau passent par les sommets de $A_1 B_1 C_1$ et, par suite, les rayons associés doivent couper les côtés en trois points P_1 , Q_1 , R_1 en ligne droite.

Les droites qui joignent O_1 aux sommets de $A_1 B_1 C_1$ et aux points I_1 , H_1 , K_1 où les côtés sont coupés par X forment aussi un faisceau en involution. Or trois des rayons passent par les sommets de ABC et, par suite, les trois autres doivent couper les côtés de ABC en trois points P, Q, R en ligne droite.

Appelant ω le point (X, OO_1) , il résulte des pascales

$$AI_1 HB_1 QP_1,$$

$$AI_1 KC_1 RP_1$$

que les droites $P_1 Q$ et $P_1 R$ passent par ω . Les quatre points P_1 , Q, R, ω sont donc alignés et, comme P appartient à QR, on a la droite .

$$(1) \quad PP_1 QR \omega.$$

Il résulte des pascales

$$A_1 IH_1 BQ_1 P,$$

$$A_1 IK_1 CR_1 P$$

que les droites PQ_1 , PR_1 passent par ω . Les quatre points P, Q_1 , R_1 , ω sont donc alignés, et, comme P_1 appartient à $Q_1 R_1$, on a la droite

$$(2) \quad PP_1 Q_1 R_1 \omega.$$

D'ailleurs les droites (1) et (2), qui ont trois points communs, se superposent.

Remarque. — Si les côtés de $A_1 B_1 C_1$ sont perpendiculaires à ceux de ABC, en prenant pour O l'orthocentre de $A_1 B_1 C_1$, X passant à l'infini, O_1 sera l'orthocentre de ABC, et les droites X_1 et OO_1 seront parallèles.