

Concours d'admission à l'École normale supérieure et aux bourses de licence en 1908. Composition de mathématiques (Sciences I et II)

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 8 (1908), p. 456-473

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__456_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
ET AUX BOURSES DE LICENCE EN 1908.**

**Composition de Mathématiques
(Sciences I et II).**

PREMIÈRE QUESTION.

1° *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n},$$

où n désigne un entier positif.

2° *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(1+x^2)^3} dx.$$

DEUXIÈME QUESTION.

1° *Intégrer l'équation différentielle*

(1) $y'' + a^2y = \sin x,$

où a désigne une constante positive, différente de un.

2° Déterminer une intégrale particulière de l'équation précédente par la condition que cette intégrale et sa dérivée première s'annulent pour $x = 0$.

3° Rechercher ce que devient cette intégrale particulière lorsque a tend vers un et en déduire l'intégration de l'équation (1) dans le cas particulier où $a = 1$.

TROISIÈME QUESTION.

On donne trois axes rectangulaires $Oxyz$ et le parallélépipède rectangle (P) dont les six faces ont pour équations

$$x = \pm 6, \quad y = \pm 11, \quad z = \pm 16.$$

Une sphère solide (S), de rayon 1, se meut à l'intérieur de (P). Le mouvement du centre de (S) est rectiligne et uniforme tant que la surface de (S) ne vient pas en contact avec une face de (P); lorsqu'un tel contact se produit, la vitesse de ce centre conserve la même valeur absolue, mais sa direction se modifie suivant la loi physique de la réflexion, c'est-à-dire que la normale commune aux surfaces en contact est l'une des bissectrices de l'angle formé par les deux vitesses du centre, avant et après le contact.

À l'époque $t = 0$, le centre de (S) est l'origine des coordonnées. Les projections de sa vitesse sur les axes sont alors respectivement égales à 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

On demande :

1° Les coordonnées x, y, z de ce centre à l'époque $t = 10$;

2° La coordonnée z à l'époque $t = 1000$.

On calculera les résultats à un centième près.

SOLUTION

Par JEAN SERVAIS.

PREMIÈRE QUESTION.

1° Le calcul de I_n est une question classique.

On a

$$I_n = \int_0^\infty \frac{1-x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = I_{n-1} - \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}.$$

En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n} &= - \int_0^\infty x d \left[\frac{1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} \right] \\ &= - \left[\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} \right]_0^\infty \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{dx}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} = \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1},$$

$$I_{n-1} = \frac{2n-5}{2n-4} I_{n-2},$$

.....,

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1,$$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

On en conclut, par multiplication,

$$I_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2.4.6 \dots (2n-2)} \frac{\pi}{2}.$$

2° L'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(1+x^2)^3} dx$$

s'écrit

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\infty \frac{ax^2+c}{(1+x^2)^3} x \, dx + \int_0^\infty \frac{bx^2+d}{(1+x^2)^3} dx. \\
 I &= a \int_0^\infty \frac{x \, dx}{(1+x^2)^2} + (c-a) \int_0^\infty \frac{x \, dx}{(1+x^2)^3} \\
 &\quad + b \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} + (d-b) \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3}, \\
 I &= a \left[-\frac{1}{2(1+x^2)} \right]_0^\infty + (c-a) \left[-\frac{1}{4(1+x^2)^2} \right]_0^\infty \\
 &\quad + b I_2 + (d-b) I_3.
 \end{aligned}$$

D'où, enfin,

$$I = \frac{c+a}{4} + \frac{b+3d}{16} \pi.$$

DEUXIÈME QUESTION.

1° L'intégrale générale de l'équation

$$(1) \quad y'' + a^2 y = \sin x$$

est, comme on sait, lorsque $a \neq 1$,

$$y = A \cos ax + B \sin ax + \frac{\sin x}{a^2 - 1};$$

sa dérivée est

$$y' = -Aa \sin ax + Ba \cos ax + \frac{\cos x}{a^2 - 1}.$$

2° Pour que y et y' s'annulent pour $x = 0$, il faut avoir

$$0 = A, \quad 0 = Ba + \frac{1}{a^2 - 1}$$

ou

$$B = -\frac{1}{a(a^2 - 1)}.$$

L'intégrale particulière qui s'annule ainsi que sa dérivée pour $x = 0$ est donc

$$y_1 = \frac{a \sin x - \sin ax}{a(a^2 - 1)}.$$

3° Lorsque α tend vers un , la limite de y_1 est donnée par la règle de l'Hospital :

$$y_1 = \frac{\sin x - x \cos x}{2}.$$

L'intégrale générale de l'équation (1) est alors, dans ce cas,

$$y = A \cos x + B' \sin x + \frac{1}{2}(\sin x - x \cos x)$$

ou, plus simplement,

$$y = A \cos x + B \sin x - \frac{1}{2}x \cos x,$$

A et B désignant des constantes arbitraires.

TROISIÈME QUESTION.

Tout se passe comme s'il s'agissait d'un point matériel se mouvant à l'intérieur du parallélépipède Q limité par les plans

$$x = \pm 5, \quad y = \pm 10, \quad z = \pm 15.$$

Les équations du mouvement initial sont

$$x = t, \quad y = \sqrt{2}t, \quad z = \sqrt{3}t.$$

Chaque fois que le point rencontre une des faces du parallélépipède (par exemple $x = 5$), une seule des projections de la vitesse change de signe et les autres ne changent pas (par exemple la projection sur Ox devient -1).

On peut donc étudier chacune des coordonnées séparément.

Le temps qui sépare deux chocs contre les plans $x = \pm 5$ est égal à leur distance 10, divisée par la vitesse suivant Ox ; c'est donc 10.

Le temps qui sépare deux chocs contre les plans $y = \pm 10$ est égal à

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2};$$

celui qui sépare deux chocs contre les plans $z = \pm 15$ est égal à

$$\frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}.$$

1° Au temps $t = 10$ il y a eu une réflexion sur chaque face :

Sur $x = 5$	au temps	$t = 5,$
Sur $y = 10$	»	$t = 5\sqrt{2},$
Sur $z = 15$	»	$t = 5\sqrt{3}.$

Les coordonnées, au temps $t = 10$, sont donc

$$\begin{aligned} x &= 5 - 5 = 0, \\ y &= 10 - \sqrt{2}(10 - 5\sqrt{2}) = 20 - 10\sqrt{2}, \\ z &= 15 - \sqrt{3}(10 - 5\sqrt{3}) = 30 - 10\sqrt{3}; \end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1,414, & \sqrt{3} &= 1,73205, \\ x &= 0, & y &= 5,86, & z &= 12,68. \end{aligned}$$

2° Le premier choc sur le plan $z = 15$ a lieu à l'instant $5\sqrt{3}$; il y aura en outre, au temps $t = 1000$, autant de réflexions sur les plans $z = \pm 15$ que $10\sqrt{3}$ est contenu de fois dans $1000 - 5\sqrt{3}$.

La partie entière de

$$\frac{1000 - 5\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{3} - 0,5 = 57,2$$

est 57.

Au temps $t = 1000$ le point a subi, par suite, 58 réflexions, la dernière ayant lieu sur le plan $z = -15$ et au temps $5\sqrt{3} + 570\sqrt{3} = 575\sqrt{3}$.

La valeur de z au temps $t = 1000$ est donc

$$\begin{aligned} z &= -15 + \sqrt{3}(1000 - 575\sqrt{3}), \\ z &= -1740 + 1000\sqrt{3} = -1740 + 1732,05, \\ z &= -7,95. \end{aligned}$$

Composition de Mathématiques (Sciences I).

PREMIÈRE QUESTION.

1° On considère trois axes rectangulaires $Oxyz$ et, dans le plan Oxy , deux hyperboles (H) et (H') et une droite (D) définies respectivement par les équations

$$(H) \begin{cases} z = 0, \\ x^2 - y^2 = m^2, \end{cases} \quad (H') \begin{cases} z = 0, \\ 2xy = n^2, \end{cases} \quad (D) \begin{cases} z = 0, \\ 2x = p. \end{cases}$$

Soient M et M' deux points du plan Oxy satisfaisant aux trois conditions suivantes : ils sont conjugués par rapport à (H) et à (H') ; le milieu de la droite qui les joint est situé sur (D) .

Montrer que M décrit une courbe (C) et M' une courbe (C') qui coïncide avec (C) .

2° On désigne par O, x_1, y_1, z_1 un trièdre coïncidant avec le trièdre $Oxyz$; on suppose que ce trièdre peut se déplacer en entraînant avec lui la courbe (C') ; on désigne par (C_1) et par M_1 les positions que prennent dans ce déplacement la courbe (C') et le point M' ; le trièdre $Oxyz$ reste fixe ainsi que la courbe (C) .

On supposera dorénavant que le trièdre mobile O, x_1, y_1, z_1 est toujours dans une position telle que l'angle des deux directions Oz, O_1z_1 soit égal à

deux droites; dès lors, la position de ce trièdre est définie par les coordonnées a, b, c du sommet O_1 , par rapport aux axes $Oxyz$, et l'angle φ des directions Ox, O_1x_1 .

3° On demande d'écrire les relations qui doivent exister entre a, b, c, φ pour que le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ soit symétrique du trièdre $Oxyz$ par rapport à une droite du plan Oxy , étant entendu que O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 doivent être respectivement les symétriques de Ox, Oy, Oz . Une pareille position du trièdre $O_1x_1y_1z_1$ est définie si l'on se donne les valeurs a_0, b_0 des coordonnées a, b : on demande alors d'exprimer les coordonnées X, Y, Z du point M_1 , par rapport aux axes $Oxyz$, en fonction des coordonnées du point M et de a_0, b_0 .

4° On suppose que le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ se déplace en partant de la position qu'on vient de définir; montrer qu'on peut faire varier a, b, c, φ de telle manière que, dans ce déplacement, la distance MM_1 d'un point quelconque M de la courbe (C) au point correspondant M_1 de la courbe (C_1) reste invariable.

SECONDE QUESTION.

On considère trois axes rectangulaires et la surface ayant pour équation

$$z = \frac{y^3 + xy^2 + \lambda x^3}{y + x},$$

λ étant une constante.

Étudier la variation de la courbure à l'origine des sections de cette surface par les plans $y = mx$ lorsque le paramètre m varie.

On examinera particulièrement les cas suivants :

$$1^\circ \lambda = \frac{4}{3}; \quad 2^\circ \lambda = -\frac{4}{9}.$$

SOLUTION

Par JEAN SERVAIS.

PREMIÈRE QUESTION.

1° Les relations qui lient les coordonnées x', y' du point M' aux coordonnées x, y du point M sont

$$(1) \quad xx' - yy' - m^2 = 0,$$

$$(2) \quad xy' + yx' - n^2 = 0,$$

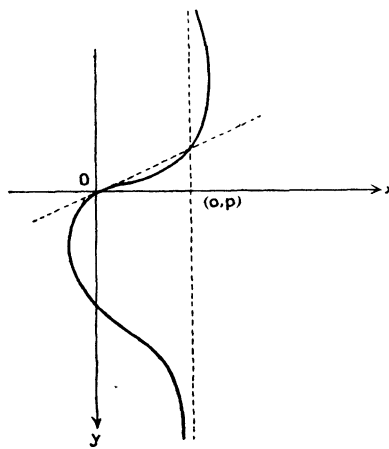
$$(3) \quad x + x' - p = 0.$$

En éliminant x' et y' entre ces trois équations, on a l'équation de la courbe (C) :

$$(x^2 + y^2)(p - x) - m^2x - n^2y = 0.$$

C'est une cubique circulaire passant par l'origine des

Fig. 1.



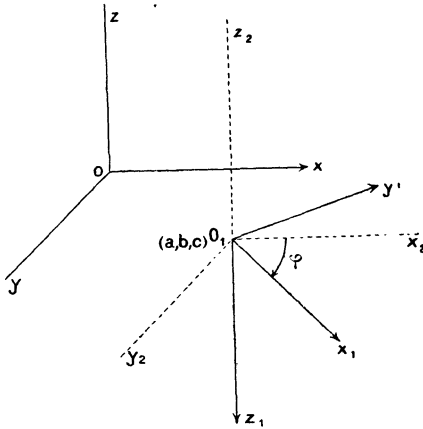
coordonnées, admettant la droite $x = p$ comme asymptote. Sa forme est indiquée dans la figure 1.

La symétrie des équations (1), (2), (3), qui ne chan-

gent pas quand on permute x avec x' et y avec y' , montre que la courbe (C') est identique à (C) .

2° Soit (*fig. 2*) $O_1x_2y_2z_2$ le trièdre $Oxyz$ trans-

Fig. 2.



porté parallèlement à lui-même de façon que son sommet soit en O_1 .

Les angles des directions des axes du trièdre $O_1x_1y_1z_1$ avec les axes du trièdre $O_1x_2y_2z_2$ sont les mêmes que ceux que font les axes de $O_1x_1y_1z_1$ avec les axes de $Oxyz$. Ils sont donnés par le Tableau :

	O_1x_1	O_1y_1	O_1z_1
Ox	φ	$\varphi - \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
Oy	$\varphi - \frac{\pi}{2}$	$\varphi - \pi$	$\frac{\pi}{2}$
Oz	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Les formules de changement de coordonnées sont donc

$$(4) \quad \begin{cases} x = a + x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi, \\ y = b + x_1 \sin \varphi - y_1 \cos \varphi, \\ z = c - z_1. \end{cases}$$

3° Soient

$$ux + vy + w = 0, \quad z = 0$$

les équations d'une droite Δ du plan xOy .

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de l'espace. Si ce point est supposé entraîné avec le trièdre O, x_1, y_1, z_1 , ses coordonnées par rapport à ce trièdre restent x, y, z et deviennent par rapport au trièdre $Oxyz$

$$\begin{aligned} X &= a + x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ Y &= b + x \sin \varphi - y \cos \varphi, \\ Z &= c - z, \end{aligned}$$

en vertu des formules (4).

Pour qu'il y ait symétrie par rapport à Δ il faut :
1° que le milieu $\frac{x+X}{2}, \frac{y+Y}{2}, \frac{z+Z}{2}$ des deux points soit sur Δ ; 2° que la droite qui joint les deux points soit perpendiculaire à Δ .

Ce qui donne

$$u \frac{a + x \cos \varphi + y \sin \varphi + x}{2} + v \frac{b + x \sin \varphi - y \cos \varphi + y}{2} + w = 0,$$

$$\frac{c - z + z}{2} = 0,$$

$$(a + x \cos \varphi + y \sin \varphi - x)v - (b + x \sin \varphi - y \cos \varphi - y)u = 0,$$

relations qui doivent être vérifiées identiquement quels

que soient x, y et z . Ceci entraîne

$$\begin{aligned} c &= 0, \\ au + bv + 2w &= 0, \\ u(1 + \cos \varphi) + v \sin \varphi &= 0, \\ u \sin \varphi + v(1 - \cos \varphi) &= 0, \\ av - bu &= 0. \end{aligned}$$

Ces cinq relations se réduisent à quatre

$$\begin{aligned} c &= 0, \\ au + bv + 2w &= 0, \\ av - bu &= 0, \\ u \cos \frac{\varphi}{2} + v \sin \frac{\varphi}{2} &= 0, \end{aligned}$$

qui déterminent a, b, c, φ , connaissant l'équation de Δ .

On aurait pu trouver plus rapidement ces relations en écrivant que O et O_1 sont symétriques par rapport à Δ , et que Δ est la bissectrice de l'angle de Ox et O_1x_1 .

Si l'on se donne les valeurs a_0 et b_0 de a et b , on a, pour déterminer φ ,

$$\tan \frac{\varphi}{2} = -\frac{u}{v} = -\frac{a_0}{b_0}.$$

On en déduit

$$\cos \varphi = \frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2}, \quad \sin \varphi = -\frac{2a_0b_0}{b_0^2 + a_0^2}.$$

Les coordonnées de M_1 par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$ sont

$$x_1 = x', \quad y_1 = y', \quad z_1 = 0.$$

On a donc, en vertu des formules (4),

$$\begin{aligned} X &= a_0 + x' \frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2} - y' \frac{2a_0b_0}{b_0^2 + a_0^2}, \\ Y &= b_0 - x' \frac{2a_0b_0}{b_0^2 + a_0^2} - y' \frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2}, \\ Z &= 0. \end{aligned}$$

Il suffirait de tirer x', y', z' en fonction de x, y, z de deux des équations (1), (2), (3) et de porter ces valeurs dans ces formules pour avoir X, Y, Z en fonction de a_0, b_0, x, y et z .

4° Lorsque le trièdre se déplace d'une façon arbitraire, l'angle de Oz et $O_1 z_1$ restant toujours égal à π , les coordonnées de M_1 par rapport à $Oxyz$ sont

$$X = a + x' \cos \varphi + y' \sin \varphi,$$

$$Y = b + x' \sin \varphi - y' \cos \varphi,$$

$$Z = c.$$

Écrivons que le carré de la distance MM_1 a la même valeur pour la position initiale de $O_1 x_1 y_1 z_1$ et pour une position quelconque; il vient

$$(a + x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - x)^2 + (b + x' \sin \varphi - y' \cos \varphi - y)^2 + c^2 \\ = (a_0 + x' \cos \varphi_0 + y' \sin \varphi_0 - x)^2 + (b_0 + x' \sin \varphi_0 - y' \cos \varphi_0 - y)^2,$$

avec

$$\tan \frac{\varphi_0}{2} = - \frac{a_0}{b_0}.$$

Ceci donne, en développant et simplifiant,

$$a^2 + b^2 - c^2 - 2ax - 2by + 2(ax' - by' - xx' + yy') \cos \varphi \\ + 2(ay' + bx' - xy' - yx') \sin \varphi \\ = a_0^2 + b_0^2 - 2a_0x - 2b_0y + 2(a_0x' - b_0y' - xx' + yy') \cos \varphi_0 \\ + 2(a_0y' + b_0x' - xy' - yx') \sin \varphi_0.$$

La relation (1) permet de remplacer $xx' - yy'$ par m^2 , la relation (2) de remplacer $xy' - yx'$ par n^2 ; enfin, à cause de (3), remplaçons x par $p - x'$, et il vient

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2a(p - x') - 2by \\ + 2(ax' - by' - m^2) \cos \varphi - 2(ay' + bx' - n^2) \sin \varphi \\ = a_0^2 + b_0^2 - 2a_0(p - x') - 2b_0y \\ + 2(a_0x' - b_0y' - n^2) \cos \varphi_0 + 2(a_0y' + b_0x' - m^2) \sin \varphi_0.$$

Cette relation doit être une *identité* en x', y', y .

Si en effet le coefficient de y était différent de zéro, on pourrait exprimer y *linéairement* en x' et y' : ce qui n'est pas, en vertu des relations (1), (2) et (3). Le coefficient de y étant nul, la relation ne contient plus que x' et y' au *premier degré*. Ce doit donc être une identité, puisque le lieu du point $x'y'$ est, non pas une droite, mais une cubique (C'); on a ainsi les quatre relations

$$\begin{aligned} b &= b_0, \\ 2a(1 + \cos \varphi) + 2b \sin \varphi &= 0, \\ -2b \cos \varphi + 2a \sin \varphi &= -2b_0, \\ a^2 + b^2 - 2ap - 2m^2 \cos \varphi - 2n^2 \sin \varphi \\ &= a_0^2 - 2a_0p - 2m^2 \frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2} + 4n^2 \frac{a_0 b_0}{b_0^2 + a_0^2}. \end{aligned}$$

La deuxième et la troisième se réduisent à une seule :

$$a \cos \frac{\varphi}{2} + b_0 \sin \frac{\varphi}{2} = 0.$$

Il n'y a donc que trois relations entre les quatre paramètres a , b , c , φ . Ce sont

$$\begin{aligned} b &= b_0, \quad \tan \frac{\varphi}{2} = -\frac{a}{b_0}, \\ a^2 + c^2 - 2ap - 2m^2 \frac{b_0^2 - a^2}{b_0^2 + a^2} + 4n^2 \frac{b_0 a}{b_0^2 + a_0^2} \\ &= a_0^2 - 2a_0p - 2m^2 \frac{b_0^2 - a_0^2}{b_0^2 + a_0^2} + 4n^2 \frac{b_0 a_0}{b_0^2 + a_0^2}. \end{aligned}$$

La dernière résolue par rapport à c^2 donne

$$c^2 = (a_0 - a) \left[a_0 + a - 2p + 4 \frac{m^2 b_0^2 (a_0 - a) + n^2 b_0 (b_0^2 - a a_0)}{(b_0^2 + a_0^2)(b_0^2 + a^2)} \right].$$

Le sommet O_i du trièdre $O_i x_i y_i z_i$ décrit donc une courbe plane du quatrième ordre située dans le plan

$$y = b_0$$

et qui a pour équation dans ce plan

$$z^2 = (a_0 - x) \left[a_0 + x - 2p + 4 \frac{m^2 b_0^2 (a_0 + x) + n^2 b_0 (b_0^2 - a_0 x)}{(b_0^2 + a_0^2)(b_0^2 + x^2)} \right].$$

A chaque position de O_1 sur cette courbe correspond une valeur de φ donnée par l'équation

$$\tan \frac{\varphi}{2} = - \frac{a}{b_0},$$

qui prouve que la projection de x, O_1, y_1 sur $Ox\gamma$ est symétrique de xOy par rapport à une certaine droite Δ de ce plan.

SECONDE QUESTION.

La section de la surface par le plan

$$y = mx$$

se compose de l'axe Oz et d'une parabole dont la projection sur zOx a pour équation

$$z = \frac{m^3 + m^2 + \lambda}{m + 1} x^2.$$

Le plan xOy étant tangent à l'origine, le rayon de courbure est la limite du rapport

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2z} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad \text{ou} \quad \frac{(1 + m^2)x^2}{2z},$$

quand x et z tendent vers zéro. On a ainsi de suite

$$R = \frac{(1 + m^2)(1 + m)}{2(m^3 + m^2 + \lambda)}.$$

On en déduit

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-2m^3 + (3\lambda - 4)m^2 + 2(\lambda - 1)m + \lambda}{2(m^3 + m^2 + \lambda)^2}.$$

1° Pour $\lambda = \frac{4}{3}$, on a

$$R = \frac{(1+m^2)(1+m)}{2\left(m^3+m^2+\frac{4}{3}\right)},$$

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-m^3 + \frac{1}{3}m + \frac{2}{3}}{\left(m^3+m^2+\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\left(m^2+m+\frac{2}{3}\right)(1-m)}{\left(m^3+m^2+\frac{4}{3}\right)^2}.$$

R s'annule pour $m = -1$ (le plan $x+y=0$ coupe suivant la droite triple oz) et devient infini pour une valeur $-\alpha$ comprise entre $-\infty$ et -1 .

Sa dérivée ne s'annule que pour $m = 1$; on a donc le Tableau de variation suivant :

$m.$	$\frac{dR}{dm}.$	R.
$-\infty$		$\frac{1}{2}$
	+	croît
$-\alpha$	...	$\frac{+\infty}{-\infty}$
	+	croît
-1	...	0
	+	croît
$+1$	0	$\frac{3}{5}(max.)$
	-	décroît
$+\infty$		$\frac{1}{2}$

2° Pour $\lambda = -\frac{4}{9}$, on a

$$R = \frac{(1+m^2)(1+m)}{2\left(m^3+m^2-\frac{4}{9}\right)},$$

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-m^3 - \frac{8}{3}m^2 - \frac{13}{9}m - \frac{2}{9}}{\left(m^3+m^2-\frac{4}{9}\right)^2},$$

ou

$$\frac{dR}{dm} = \frac{-(m+2)\left(m+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(m^3+m^2-\frac{4}{9}\right)^2};$$

R s'annule pour $m = -1$ et devient infini pour une valeur β positive.

On a donc le Tableau de variation suivant :

$m.$	$\frac{dR}{dm}.$	R
$-\infty$		1
	+	2 croît
-2	0	$\frac{9}{16}$ (max.)
	—	décroît
-1	...	0
	—	décroît
$-\frac{1}{3}$	0	-1
	—	décroît
β	...	$-\infty$ $+\infty$
	—	décroît
$+\infty$		1 2

Cas général. — Il serait facile d'aborder maintenant le cas général. Le discriminant du numérateur de $\frac{dR}{dm}$ est

$$\Delta = 54\lambda^4 - 84\lambda^3 + 60\lambda^2 + 48\lambda,$$

dont nous connaissons d'avance une racine $\lambda = -\frac{4}{9}$; on a donc

$$\Delta = 6\lambda(9\lambda + 4)(\lambda^2 - 2\lambda + 2).$$

Lorsque λ est compris entre $-\frac{4}{9}$ et zéro, et dans ce

cas seulement, $\frac{dR}{dm}$ s'annule pour trois valeurs de λ .

D'autre part, le dénominateur de R n'a trois racines réelles que lorsque λ est compris entre $-\frac{4}{27}$ et zéro.

Il y aura donc quatre cas à examiner :

1° $\lambda \leq -\frac{4}{9}$. Dans ce cas R devient infini pour une seule valeur de m qui est positive, et il passe par un maximum pour une valeur négative de m .

La variation est analogue à celle du second cas particulier.

2° $-\frac{4}{9} < \lambda \leq -\frac{4}{27}$. R n'a toujours qu'un infini positif, mais $\frac{dR}{dm}$ s'annule pour trois valeurs *négatives* de m ; il y a deux maxima et un minimum.

Pour $\lambda = -\frac{4}{27}$, R a, en plus, un infini double.

3° $-\frac{4}{27} < \lambda \leq 0$. R devient infini pour trois valeurs réelles de m , deux négatives, une positive; $\frac{dR}{dm}$ s'annule pour trois valeurs négatives de m .

Pour $\lambda = 0$, on a

$$R = \frac{1 + m^2}{2m^2}.$$

La surface se réduit au plan $x + y = 0$ et au cylindre parabolique $z = y^2$.

4° $\lambda > 0$. R est infini pour une valeur négative de m et $\frac{dR}{dm}$ s'annule pour une valeur positive de m .

La variation est du type de celle du premier cas particulier.
