

J. JUHEL-RÉNOY

Sur la règle des signes de Descartes

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 8
(1908), p. 449-450

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__449_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A3d]

SUR LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES ;

PAR M. J. JUHEL-RÉNOY.

Considérons le polynome

$$f(x) \equiv x^n \varphi(x) + h,$$

$\varphi(x)$ étant un polynome de degré $m - n$ de la forme

$$K + A_1 x + A_2 x^2 + \dots,$$

et construisons la courbe ayant pour équation

$$y = x^n \varphi(x),$$

en remarquant que, pour x assez petit et positif, y a le même signe que K .

Notons encore que $\varphi(x)$ et $f'(x)$ ont le même nombre de variations et que le nombre de ces variations est égal à celui de $f(x)$ ou à ce nombre diminué d'une unité suivant que K et h ont le même signe ou des signes contraires.

Pour démontrer le théorème de Descartes, il suffit de faire voir que, si on l'admet pour les équations de degré $m - 1$, il est vrai pour une équation de degré m ; car, étant vérifié pour une équation du premier degré, il est vrai d'une manière générale.

Supposons donc, K étant, par exemple, positif, que $f'(x)$ ait p variations et, par conséquent, $(p - 2l)$ racines positives; y aura, au plus, pour $x > 0$ $(p - 2l)$ maxima ou minima; tous ces maxima peuvent être positifs, mais, K étant positif, il ne peut pas y en avoir plus de $(p - 2l - 1)$ négatifs.

Or, pour résoudre l'équation

$$f(x) = 0,$$

il suffit de couper la courbe

$$y = x^n \varphi(x)$$

par la parallèle à l'axe des x , dont l'équation est

$$y = -h.$$

Si donc h est positif, l'équation $f(x) = 0$ a, au plus, $p - 2l$ racines positives, et, si elle en a moins, la différence est un nombre pair.

Si h est négatif, l'équation $f(x) = 0$ a, au plus, $(p - 2l + 1)$ racines positives et, si elle en a moins, la différence est un nombre pair.

Le théorème de Descartes est ainsi démontré, car, dans le cas de h positif, l'équation $f(x) = 0$ a p variations, et elle en a $(p + 1)$ dans le cas de h négatif.

L'hypothèse de $K < 0$ donne lieu à un raisonnement identique.