

JEAN SERVAIS

**Concours d'admission à l'École
polytechnique en 1908. Composition
d'algèbre et de trigonométrie**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 8
(1908), p. 370-376

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__370_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1908.
COMPOSITION D'ALGÈBRE ET DE TRIGONOMÉTRIE.

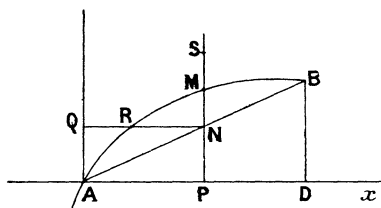
SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

1. *Construire la courbe qui représente la fonction*

$$y = 4e^{\frac{\log \frac{x}{e}}{(\log x)^2}}.$$

II. Soit (C) l'arc de cette courbe qui a pour origine le point A, où elle traverse l'axe des x , et pour

Fig. 1.



extrémité le point B qui correspond au maximum de y . Calculer l'aire (Σ) comprise entre l'arc (C) , l'axe des x et l'ordonnée BD de B.

III. Soit M un point quelconque de (C) . Menons la perpendiculaire PM à l'axe des x ; soit N le point où elle rencontre la corde AB. Menons par N la parallèle à l'axe des x qui coupe en R l'arc (C) et en Q la parallèle à l'axe des y menée par A. Portons sur le prolongement de PM une longueur MS égale à QR.

Lorsque M décrit (C) , S décrit un arc de courbe (C') ; cet arc passe au point A. Calculer, à un centième près, le coefficient angulaire de la tangente à cet arc (C') au point A.

IV. Soit (Σ') l'aire balayée par le segment de droite MS lorsque M décrit (C) . Montrer qu'il existe entre (Σ) et (Σ') une relation numérique qui subsiste lorsqu'on remplace dans les constructions précédentes l'arc (C) par un autre arc de courbe quelconque ayant les mêmes extrémités A et B, pourvu toutefois que ce nouvel arc soit situé au-dessus de AB et ne soit pas rencontré en plus d'un point par une

parallèle quelconque à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.

NOTA. — Le signe $\log$ représente des logarithmes népériens dont la lettre e représente la base.

Les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires.

I. Pour que y soit réel et bien déterminé, il faut que la valeur de x soit positive.

Si l'on pose

$$\log x = z,$$

on a

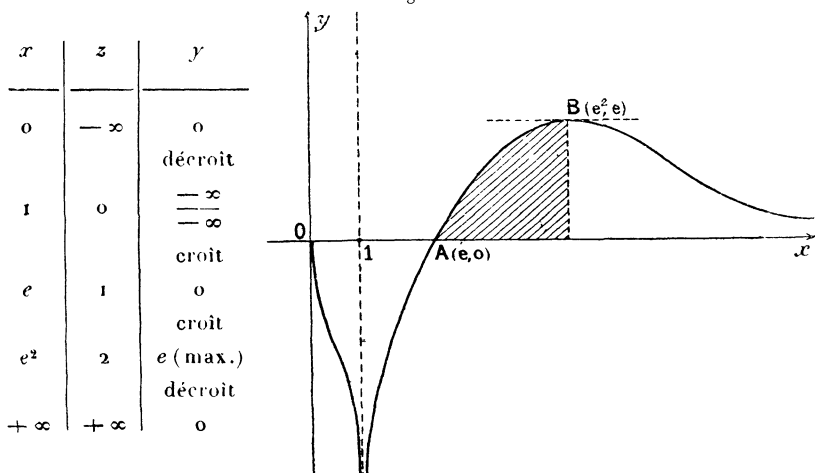
$$y = 4e^{\frac{z-1}{z^2}}, \quad \frac{dy}{dz} = 4e^{\frac{2-z}{z^3}}.$$

La dérivée s'annule pour

$$z = 2, \quad x = e^2.$$

On a, par suite, le Tableau de variation et la courbe ci-dessous (fig. 2) :

Fig. 2.



La courbe coupe Ox au point A d'abscisse $x = e$.

La tangente à l'origine est verticale, car en ce point

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = 4e \frac{2-z}{z^3 e^z};$$

la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est infinie, car le dénominateur $z^3 e^z$ tend vers zéro quand z croît indéfiniment par valeurs négatives.

II. L'aire demandée a pour valeur

$$\Sigma = \int_e^{e^2} y \, dx = \int_1^2 4e \frac{z-1}{z^2} e^z \, dz,$$

ceci s'écrit

$$\Sigma = 4e \int_1^2 \frac{1}{z} \, de^z + e^z d\left(\frac{1}{z}\right) = 4e \int_1^2 d\left(\frac{e^z}{z}\right),$$

$$\Sigma = 4e \left(\frac{e^2}{2} - e \right) = 2e^3 - 4e^2.$$

III. Soient x, y les coordonnées de M et x', y' celles de R. Le point N a pour coordonnées x, y' et, comme il est situé sur AB, on a

$$y' = \frac{x-e}{e-1}.$$

D'ailleurs on a

$$y' = 4e \frac{\log x' - 1}{(\log x')^2}.$$

Par suite, on a, entre x' et x , la relation

$$4e \frac{\log x' - 1}{(\log x')^2} = \frac{x-e}{e-1}.$$

Soit u le segment QR :

$$u = x' - e,$$

d'où

$$(1) \quad 4e \frac{\log(u+e)-1}{[\log(u+e)]^2} = \frac{x-e}{e-1}.$$

Y étant l'ordonnée de S, on a

$$Y = y + u$$

et, par suite, le coefficient angulaire de la courbe (C') est

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx}.$$

Nous avons déjà calculé $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = 4e \frac{2 - \log x}{x(\log x)^3};$$

pour avoir $\frac{du}{dx}$, différencions la relation (1) qui donne

$$4e \frac{2 - \log(u+e)}{[\log(u+e)]^3} \frac{1}{u+e} du = \frac{dx}{e-1},$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = \frac{u+e}{4e(e-1)} \frac{[\log(u+e)]^3}{2 - \log(u+e)}.$$

Au point A on a

$$x = e, \quad u = 0;$$

par suite,

$$\frac{dy}{dx} = 4, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{4(e-1)},$$

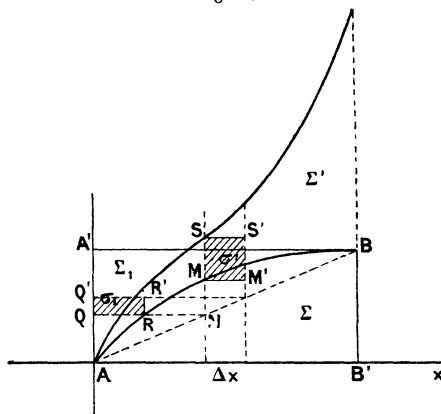
et enfin

$$\frac{dY}{dx} = 4 + \frac{1}{4(e-1)}.$$

IV. Donnons à x un accroissement Δx , et soit σ' le rectangle élémentaire MM'S'S (fig. 3) correspondant de Σ' ; à ce rectangle correspond un rectangle élémentaire $\sigma_1 = QRR'Q'$ de l'aire Σ_1 comprise entre la courbe C,

la parallèle AA' à Oy et la parallèle $A'B$ à Ox . σ' et σ_1 ,

Fig. 3.



ayant même hauteur u , sont entre eux comme leurs bases, $MM' = \Delta x$ et $QQ' = \Delta y'$:

$$\frac{\sigma'}{\sigma_1} = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = m,$$

m étant le coefficient angulaire de AB .

On a donc

$$\sigma' = m \sigma_1$$

et par suite, en sommant les rectangles,

$$\Sigma' = m \Sigma_1.$$

Or, dans les hypothèses faites, Σ_1 est égale à la différence entre l'aire du rectangle $AB'BA'$ et Σ . Si l'on désigne AB' par a , on a $BB' = ma$ et, par suite,

$$\Sigma' = m(ma^2 - \Sigma).$$

Cette relation est indépendante de la forme de la courbe.

Dans le cas particulier dont il s'agit,

$$m = \frac{1}{e-1}, \quad \alpha = e^2 - e;$$

on a donc

$$\Sigma' = \frac{1}{e-1} [e^2(e-1) - \Sigma].$$