

SAMUEL CERVERA

Généralisation d'une question de Wolstenholme

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 8
(1908), p. 216-220

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__216_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[111 a]

GÉNÉRALISATION D'UNE QUESTION DE WOLSTENHOLME ;

PAR M. SAMUEL CERVERA,

Capitaine au 28^e de ligne, Tarragone (Espagne).

M. C.-A. Laisant a proposé, dans son *Recueil de Problèmes de Mathématiques* (p. 18), la question suivante, déjà résolue dans les *Nouvelles Annales* :

Si x, y, z sont trois nombres positifs dont la somme est égale à l'unité, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z) > 8xyz \text{ (}^1\text{)}.$$

Cette proposition n'est qu'un cas particulier du théorème suivant :

Si $x, y, z, \dots, v$ sont m nombres positifs dont la somme est égale à l'unité, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z) \dots (1-v) > (m-1)^m xyz \dots v.$$

(¹) WOLSTENHOLME, *Nouvelles Annales*, 1554.

Démonstration. — En effet

$$(m-1)^m xy z \dots v = (m-1)x(m-1)y(m-1)z \dots (m-1)v,$$

$$\begin{aligned} & (m-1)x + (m-1)y + \dots + (m-1)v \\ &= (m-1)(x + y + z + \dots + v) = m-1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & (1-x) + (1-y) + (1-z) + \dots + (1-v) \\ &= m - (x + y + z + \dots + v) = m-1. \end{aligned}$$

Par la théorie des maxima et des minima, on sait que si nous décomposons le nombre $(m-1)$ en m de ses parties, et si nous multiplions celles-ci entre elles, elles nous donneront un produit maximum, quand leurs facteurs seront égaux à la $\frac{1}{m}$ partie de $(m-1)$; et, dès lors, des deux produits

$$\begin{aligned} & (1-x)(1-y)(1-z) \dots (1-v), \\ & (m-1)x(m-1)y(m-1)z \dots (m-1)v, \end{aligned}$$

qui ont m facteurs et dont la somme est $(m-1)$, le majeur des deux sera celui dont les facteurs m seront moins inégaux, puisque le produit le plus grand correspondrait au cas où ils seraient égaux à la $\frac{1}{m}$ partie de la somme $(m-1)$.

Les différences entre ces facteurs pris de deux en deux sont :

Pour le premier produit

$$\begin{aligned} & (1-x) - (1-y) = y - x, \\ & (1-x) - (1-z) = z - x, \\ & \dots\dots\dots; \\ & (1-y) - (1-x) = x - y, \\ & \dots\dots\dots; \\ & (1-v) - (1-x) = x - v, \\ & (1-v) - (1-y) = y - v, \\ & \dots\dots\dots; \end{aligned}$$

Pour le second produit

$$\begin{aligned}
 (m-1)y - (m-1)x &= (m-1)(y-x), \\
 (m-1)z - (m-1)x &= (m-1)(z-x), \\
 &\dots\dots\dots, \\
 (m-1)x - (m-1)y &= (m-1)(x-y), \\
 &\dots\dots\dots, \\
 (m-1)x - (m-1)v &= (m-1)(x-v), \\
 (m-1)y - (m-1)v &= (m-1)(y-v). \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Ceci nous démontre que les différences $(y-x)$, $(z-x)$, ... sont précisément $m-1$ autant de fois plus petites que les différences $(m-1)(y-x)$, $(m-1)(z-v)$,

D'où il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
 (1-x)(1-y)(1-z)\dots(1-v) \\
 > (m-1)x(m-1)y(m-1)z\dots(m-1)v
 \end{aligned}$$

ou

$$(1-x)(1-y)(1-z)\dots(1-v) > (m-1)^m xyz\dots v,$$

précisément ce que nous voulions démontrer.

COROLLAIRE. — Si $x = y = z = \dots = v$ sont m nombres positifs égaux à la $\frac{1}{m}$ partie de l'unité, on a

$$(1-x)^m = (m-1)^m x^m,$$

puisque les différences

$$y-x=0=(m-1)(y-x)\dots,$$

les produits

$$\begin{aligned}
 (1-x)(1-x)\dots(1-x) &= (1-x)^m, \\
 (m-1)x(m-1)x\dots(m-1)x &= (m-1)^m x^m
 \end{aligned}$$

seront égaux.

Remarquez aussi que

$$1 - x = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m} = (m-1) \frac{1}{m} = (m-1)x,$$

ce qui prouve que

$$(1-x)^m = (m-1)^m x^m.$$

Si $m = 1$, on a

$$x = 1, \dots, 1 - x = 0 \quad (\text{corollaire}).$$

Remarque :

Si $m = 2$, on a

$$x + y = 1, \dots, (1-x)(1-y) > 1^2 xy \quad (\text{théorème}), \\ (1-x)(1-y) > xy.$$

Si $m = 2$, $x = y$, on a

$$2x = 1, x = \frac{1}{2}, \dots, (1-x)^2 = x^2, \dots, \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Si $m = 3$, on a

$$x + y + z = 1, \dots, (1-x)(1-y)(1-z) > 2^3 xyz = 8xyz \quad (1).$$

Si $m = 4$, on a

$$(1-x)(1-y)(1-z)(1-s) > 81xyzs.$$

Etc.

Exemple :

$$0,35 + 0,25 + 0,40 = 1. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - 0,35 = 0,65 \\ 1 - 0,25 = 0,75 \\ 1 - 0,40 = 0,60 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} (0,35 \cdot 0,25 \cdot 0,40) \times 8 \\ = (2 \cdot 0,35)(2 \cdot 0,25)(2 \cdot 0,40) = 0,28 \\ 0,65 \cdot 0,75 \cdot 0,60 \end{array} \right\} \quad 0,2925 > 0,28.$$

(1) WOLSTENHOLME, *Nouvelles Annales*, 1554.

Remarque :

$$\left. \begin{aligned} 0,75 - 0,65 &= 0,10, \quad \dots, \quad 2(0,35) - 2(0,25) = 0,20 = 2(0,10) \\ 0,75 - 0,60 &= 0,15, \quad \dots, \quad 2(0,40) - 2(0,25) = 0,30 = 2(0,15) \\ 0,65 - 0,60 &= 0,05, \quad \dots, \quad 2(0,40) - 2(0,25) = 0,10 = 2(0,05) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 0,75 + 0,65 + 0,60 &= 2. \\ 0,70 + 0,50 + 0,80 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

et cependant :

$$0,75.0,65.0,60 > 0,70.0,50.0,80 = 2^3.0,35.0,25.0,40.$$

Si $x = y = z$

$$3x = 1, \quad x = \frac{1}{3}, \quad 1 - x = \frac{2}{3} \dots, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^3, \quad \frac{8}{27} = 8 \cdot \frac{1}{27}.$$