

MICHEL PETROVITCH

**Procédé élémentaire d'application des
intégrales définies réelles aux équations
algébriques et transcendantes**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 8
(1908), p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__1_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[E5]

PROCÉDÉ ÉLÉMENTAIRE D'APPLICATION DES INTÉGRALES
DÉFINIES REELLES AUX ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES ET
TRANSCENDANTES ;

PAR M. MICHEL PETROVITCH,
à Belgrade (Serbie).

I. — SUR UNE INTÉGRALE RÉELLE DISCONTINUE.

1. Soit $\varphi(t)$ une fonction réelle pour t réel, continue dans un intervalle réel donné (a, b) et telle que l'intégrale

$$(1) \quad g_n = \int_a^b \varphi(t) \cos nt \, dt$$

ait un sens pour toute valeur entière positive ou nulle de n .

J'envisage l'intégrale définie

$$(2) \quad I(x) = \int_a^b \varphi(t) \log(1 - 2x \cos t + x^2) \, dt,$$

qui, en vertu du développement

$$(3) \quad \log(1 - 2x \cos t + x^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos nt}{n},$$

(2)

sera une fonction $\lambda(x)$ de x , donnée pour $|x|$ suffisamment petit par le développement

$$(4) \quad \lambda(x) = -2 \sum_1^{\infty} \frac{g_n x^n}{n},$$

ou bien par l'intégrale

$$(5) \quad \lambda(x) = -2 \int_a^b \frac{\mu(x)}{x} dx$$

avec

$$(6) \quad \mu(x) = \sum_1^{\infty} g_n x^n.$$

Soit R le rayon de convergence de la série (6) [dont la détermination se réduit à celle de l'intégrale (1) pour n très grand]. Alors, la série (3) étant uniformément convergente pour $|x| \leq 1$:

1° Si $R \geq 1$, l'intégrale $I(x)$ pour $|x| < 1$ coïncidera avec la fonction $\lambda(x)$; d'autre part, l'identité

$$\log(1 - 2x \cos t + x^2) = 2 \log x + \log \left(1 - \frac{2}{x} \cos t + \frac{1}{x^2} \right)$$

montre que, pour $|x| > 1$, $I(x)$ coïncidera avec la fonction

$$(7) \quad \Omega(x) = 2g_0 \log x + \lambda\left(\frac{1}{x}\right).$$

2° Si $R < 1$, $I(x)$ coïncide avec $\lambda(x)$ pour $|x| < R$ et avec $\Omega(x)$ pour $|x| > \frac{1}{R}$.

L'intégrale $I(x)$ est donc une fonction discontinue de x , coïncidant tantôt avec $\lambda(x)$, tantôt avec $\Omega(x)$, suivant que le point x se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur d'une certaine circonférence ou d'une certaine couronne ayant l'origine comme centre.

2. Un cas particulièrement intéressant pour ce qui suit se présente lorsque la fonction $\varphi(t)$ et les limites a et b de l'intégrale $I(x)$ sont telles que l'intégrale (1) soit constamment nulle dès que l'entier n dépasse une certaine valeur p , tandis que pour $n \leq p$ elle soit déterminée, finie et différente de zéro. Nous dirons, dans ce cas, pour abrégé, qu'une telle fonction *satisfait à la condition* $[\varphi, a, b, p]$.

Ainsi, $\varphi = \text{const.}$ satisfait à la condition

$$[\varphi, 0, 2k\pi, 0].$$

La fonction

$$\varphi = \left(\frac{\sin t}{t} \right)^k \quad (k = \text{entier positif})$$

satisfait à la condition $[\varphi, 0, \infty, k-1]$.

La fonction

$$\varphi = \left(\frac{\sin ht}{t} \right)^2 \quad (h = \text{entier positif})$$

satisfait à la condition $[\varphi, 0, \infty, 2h-1]$.

Toute fonction continue $\varphi(t)$ admettant 2π comme période, ne s'annulant pas pour $t = 0$ et dont le développement en série trigonométrique ne contient pas de cosinus satisfait à la condition $[\varphi, 0, 2\pi, 0]$, etc.

Dans tous ces cas, la fonction $\lambda(x)$ se réduit au polynôme de degré p en x

$$(8) \quad \lambda(x) = -2 \left(g_1 x + \frac{g_2}{2} x^2 + \dots + \frac{g_p}{p} x^p \right),$$

et l'on a $R = \infty$. Si, en particulier, la fonction φ satisfait à la condition $[\varphi, a, b, 0]$, on a $\lambda(x) = 0$, et, par suite,

$$(9) \quad I(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \leq 1. \\ 2g_0 \log x & \text{pour } |x| > 1. \end{cases}$$

(4)

3. Dans le cas où, les limites de l'intégrale étant 0 et 2π , la fonction continue $\varphi(t)$ admet la période 2π , de sorte que

$$(10) \quad \varphi(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n \sin nt + \sum_1^{\infty} B_n \cos nt,$$

on aura

$$(11) \quad g_0 = 2\pi A_0, \quad g_n = \pi B_n,$$

et la fonction correspondante $\lambda(x)$ peut s'écrire

$$(12) \quad \lambda(x) = -2\pi \int_0^x \frac{\Phi(x)}{x} dx$$

avec

$$(13) \quad \Phi(x) = \sum_1^{\infty} B_n x^n.$$

Ainsi, lorsque $\varphi(t)$ est le coefficient de i dans une expression $\psi(e^{it})$, $\psi(z)$ étant une fonction de z holomorphe pour $|z| < 1$, on aura $A_0 = 0$, $B_n = 0$, et, par suite,

$$g_0 = 0, \quad \lambda(x) = 0.$$

Lorsque $\varphi(t)$ est la partie réelle de $\psi(e^{it})$, on trouve aisément

$$(14) \quad g_0 = 2\pi \psi(0), \quad \lambda(x) = -2\pi \int_0^x \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} dx,$$

et le rayon R sera au moins égal à 1. En faisant donc

$$(15) \quad \psi(z) = -\frac{1}{2\pi} z f'(z),$$

$f(z)$ étant une fonction holomorphe pour $|z| < 1$, on aura

$$g_0 = 0, \quad \lambda(x) = f(x),$$

ce qui donne, d'une manière bien élémentaire, une so-

lution du problème suivant :

L'intégrale $I(x)$ étant prise entre les limites 0 et 2π , déterminer la fonction $\varphi(t)$ correspondant à une fonction $\lambda(x)$ donnée, holomorphe pour $|x| < 1$.

Cette solution consisterait à prendre pour $\varphi(t)$ la partie réelle de l'expression $-\frac{1}{2\pi} z \lambda'(z)$ pour $z = e^{ti}$. La fonction $\varphi(t)$, correspondant à une fonction $\mu(t)$ donnée, serait égale à la partie réelle de $\frac{1}{\pi} \mu(e^{ti})$.

Remarquons aussi que l'intégrale $I(x)$ est égale au double de l'intégrale de la même forme, mais prise entre les limites 0 et π .

II. — DIFFÉRENCE ENTRE LE NOMBRE DE ZÉROS ET DE PÔLES D'UNE FONCTION MÉROMORPHE DANS UNE CIRCONFÉRENCE DONNÉE.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur et sur la circonférence d'un cercle C de rayon r , ayant l'origine comme centre, réelle pour z réel et ne s'annulant pas pour $z = 0$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des zéros et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ ses pôles à l'intérieur de C , en supposant qu'aucun d'eux ne se trouve sur C et en comptant chaque zéro et chaque pôle autant de fois qu'indique son degré de multiplicité.

Envisageons l'intégrale définie

$$(16) \quad H(r) = \int_a^b \varphi(t) F(r, t) dt,$$

où $F(r, t)$ désigne la partie réelle de $\frac{z f'(z)}{f(z)}$ pour $z = r e^{ti}$.

(6)

Comme l'on peut écrire

$$(17) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_1^n \frac{1}{z - \alpha_k} - \sum_1^m \frac{1}{z - \beta_k} + \chi(z),$$

$\chi(z)$ étant holomorphe dans C et sur C, les identités

$$(18) \quad \text{partie réelle de } f(re^{ti}) = \frac{1}{2} [f(re^{ti}) + f(re^{-ti})],$$

$$(19) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{re^{ti}}{re^{ti} - \alpha} + \frac{re^{-ti}}{re^{-ti} - \alpha} \right) = \frac{1 - \frac{\alpha}{r} \cos t}{1 - \frac{2\alpha}{r} \cos t + \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2}$$

conduisent à

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} F(r, t) &= \sum_1^n \frac{1 - \frac{\alpha_k}{r} \cos t}{1 - \frac{2\alpha_k}{r} \cos t + \left(\frac{\alpha_k}{r}\right)^2} \\ &- \sum_1^m \frac{1 - \frac{\beta_k}{r} \cos t}{1 - \frac{2\beta_k}{r} \cos t + \left(\frac{\beta_k}{r}\right)^2} + \psi(r, t), \end{aligned} \right.$$

où $\psi(r, t)$ désigne la partie réelle de $z\chi(z)$ pour $z = re^{ti}$. Par suite, on aura

$$(21) \quad H(r) = \sum_1^n B\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) - \sum_1^m B\left(\frac{\beta_k}{r}\right) + U(r),$$

où $B(x)$ représente l'intégrale définie

$$(22) \quad B(x) = \int_a^b \varphi(t) \frac{1 - x \cos t}{1 - 2x \cos t + x^2} dt,$$

et où

$$(23) \quad U(r) = \int_a^b \varphi(t) \psi(r, t) dt.$$

Or, l'identité

$$\frac{1 - x \cos t}{1 - 2x \cos t + x^2} = 1 - \frac{x}{2} \frac{d}{dx} \log(1 - 2x \cos t + x^2)$$

(7)

fait voir qu'en mettant à part les valeurs $|x| = 1$, on aura pour toute valeur de x

$$B(x) = g_0 - \frac{x}{2} \frac{dI}{dx}.$$

Il s'ensuit, d'après les propriétés de l'intégrale $I(x)$, que pour toute valeur de x à l'intérieur d'une certaine circonférence C_1 on aura [formules (5) et (7)]

$$B(x) = g_0 + \mu(x),$$

et, pour toute valeur de x à l'extérieur d'une certaine circonférence C_2 , on aura

$$B(x) = -\mu\left(\frac{1}{x}\right),$$

$\mu(x)$ étant donnée par (6); les rayons R_1 et R_2 de C_1 et C_2 ont pour valeurs

$$R_1 = \text{plus petite des valeurs } 1 \text{ et } R,$$

$$R_2 = \text{plus grande des valeurs } 1 \text{ et } \frac{1}{R},$$

R étant le rayon de convergence de la série (6).

Choisissons maintenant pour $\varphi(t)$ une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$; on aura

$$\mu(x) = 0, \quad R = \infty,$$

et, comme les deux circonférences C_1 et C_2 coïncident alors avec C , on aura

$$B(x) = g_0 \quad \text{pour } |x| < 1,$$

$$B(x) = 0 \quad \text{pour } |x| > 1;$$

par suite,

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n B\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) = n g_0, \\ \sum_1^m B\left(\frac{\beta_k}{r}\right) = m g_0. \end{array} \right.$$

D'autre part, la fonction $\chi(z)$ étant pour $|z| \leq r$ développable en série

$$\chi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots,$$

on aura

$$\psi(r, t) = 2 \sum_1^{\infty} b_n r^{n+1} \cos(n+1)t,$$

et, par suite,

$$(25) \quad U(r) = 2 \sum_1^{\infty} b_n g_{n+1} r^{n+1} = 0,$$

de sorte que l'intégrale $H(r)$ se réduit à la valeur $(n-m)g_0$.

D'où le résultat suivant :

La différence entre le nombre des zéros et celui des pôles de $f(z)$ est égale à la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{g_0} \int_a^b \varphi(t) F(r, t) dt,$$

où $F(r, t)$ désigne la partie réelle de $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ pour $z = re^{it}$ et où $\varphi(t)$ est une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$.

Ainsi, par exemple, cette différence sera représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{g_0} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} F(r, t) dt,$$

dans quel cas on aura

$$g_0 = \frac{\pi}{2},$$

ou bien par une intégrale quelconque de la forme

$$\frac{1}{g_0} \int_0^{2\pi} \varphi(t) F(r, t) dt,$$

$\varphi(t)$ étant une fonction continue, admettant 2π comme période, ne s'annulant pas pour $t = 0$ et dont le développement en série de Fourier ne contient pas de cosinus; dans ce cas on aura

$$g_0 = \pi \varphi(0).$$

En prenant dans la dernière intégrale $\varphi(t) = 1$ on retrouve la formule

$$n - m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(r, t) dt.$$

III. — RAPPORT DES PRODUITS DES MODULES DES ZÉROS ET DES PÔLES.

Considérons la fonction précédente $f(z)$ et partons de

$$(26) \quad \log \frac{f(z)}{f(0)} = \sum_1^n \log \left(1 - \frac{z}{\alpha_k} \right) - \sum_1^m \log \left(1 - \frac{z}{\beta_k} \right) + \xi(z),$$

où $\xi(z)$ sera holomorphe à l'intérieur et sur la circonférence C et s'annule pour $z = 0$.

Formons l'intégrale

$$(27) \quad K(r) = \int_a^b \varphi(t) M(r, t) dt,$$

où

$$(28) \quad M(r, t) = \log |f(z)| \quad \text{pour} \quad z = re^{it}.$$

Les identités

$$(29) \quad M(r, t) = \frac{1}{2} [\log f(re^{it}) + \log f(re^{-it})],$$

$$(30) \quad \begin{cases} \log \left(1 - \frac{re^{it}}{\alpha} \right) + \log \left(1 - \frac{re^{-it}}{\alpha} \right) \\ = \log \left[1 - \frac{2r}{\alpha} \cos t + \left(\frac{r}{\alpha} \right)^2 \right] \end{cases}$$

conduisent à

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} M(r, t) = & \frac{1}{2} \sum_1^n \log \left[1 - \frac{2r}{\alpha_k} \cos t + \left(\frac{r}{\alpha_k} \right)^2 \right] \\ & - \frac{1}{2} \sum_1^m \log \left[1 - \frac{2r}{\beta_k} \cos t + \left(\frac{r}{\beta_k} \right)^2 \right] \\ & + \log f(0) + \psi(r, t), \end{aligned} \right.$$

où

$$(32) \quad \psi(r, t) = \sum_1^\infty c_n r^n \cos nt,$$

c_n désignant les coefficients du développement

$$\xi(z) = \sum_1^\infty c_n z^n,$$

convergent pour $z \leq r$.

Par suite, l'intégrale $K(r)$ aura la valeur

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} K(r) = & \frac{1}{2} \sum_1^n I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) - \frac{1}{2} \sum_1^m I\left(\frac{r}{\beta_k}\right) \\ & + \log f(0) \int_a^b \varphi(t) dt \\ & + \int_a^b \varphi(t) \psi(r, t) dt. \end{aligned} \right.$$

Choisissons maintenant pour $\varphi(t)$ une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$; les formules (9) montrent que

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^n I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) &= 2 \mathcal{E}_0 \log \frac{r^n}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}, \\ \sum_1^m I\left(\frac{r}{\beta_k}\right) &= 2 \mathcal{E}_0 \log \frac{r^m}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}, \end{aligned} \right.$$

(11)

et comme, en vertu de (32), on a

$$(35) \quad \int_a^b \varphi(t) \psi(r, t) dt = \sum_1^{\infty} c_n g_n r^n = 0,$$

la valeur de $K(r)$ se réduit à

$$(36) \quad K(r) = g_0 \log \left[f(0) r^{n-m} \frac{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \right].$$

En égalant à $K(r)$ la partie réelle du second membre de (36), on est conduit au résultat suivant :

Quelle que soit la fonction $\varphi(t)$ satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$, et $M(r, t)$ désignant le logarithme du module de $f(z)$ le long du cercle de rayon r , l'intégrale définie

$$K(r) = \int_a^b \varphi(t) M(r, t) dt$$

aura pour valeur

$$(37) \quad g_0 \log \left| f(0) r^{n-m} \frac{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \right|.$$

Tel est, par exemple, le cas de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} M(r, t) dt,$$

ou d'une intégrale quelconque de la forme

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) M(r, t) dt,$$

$\varphi(t)$ étant une fonction continue à période 2π à laquelle correspondrait le développement

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin t + A_2 \sin 2t + \dots$$

En prenant dans ce dernier cas

$$A_0 = 1, \quad A_1 = A_2 = A_3 = \dots = 0,$$

on retrouve le théorème de M. Jensen pour le cas où $f(z)$ est réel pour z réel.

IV. — FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET ASYMÉTRIQUES DES ZÉROS.

1. Soit $f(z)$ un polynôme en z de degré n et envisageons l'intégrale précédente

$$K(r) = \int_a^b \varphi(t) M(r, t) dt.$$

Les identités (29), (30) et

$$(38) \quad \log \frac{f(z)}{f(0)} = \sum \log \left(1 - \frac{z}{\alpha_k} \right)$$

conduisent directement à

$$(39) \quad K(r) = \frac{1}{2} \sum_1^n I \left(\frac{r}{\alpha_k} \right) + g_0 \log f(0).$$

Or, d'après les propriétés de l'intégrale $I(x)$, si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sont les zéros de $f(z)$ compris à l'intérieur de la circonférence c de rayon r , et $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n$ ses zéros à l'extérieur de c , on aura pour $k = 1, 2, \dots, m$

$$(40) \quad \sum I \left(\frac{r}{\alpha_k} \right) = 2g_0 \log \frac{r^n}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} + \sum \lambda \left(\frac{\alpha_k}{r} \right)$$

et pour $k = m+1, \dots, n$

$$(41) \quad \sum I \left(\frac{r}{\alpha_k} \right) = \sum \lambda \left(\frac{r}{\alpha_k} \right),$$

de sorte que

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(r) = \sum_{(1)} \lambda \left(\frac{\alpha_k}{r} \right) \\ \quad + \sum_{(2)} \lambda \left(\frac{r}{\alpha_k} \right) + 2g_0 \log \frac{r^n}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} + g_0 f(0), \end{array} \right.$$

la somme $\sum_{(1)}$ étant rapportée aux zéros intérieurs et $\sum_{(2)}$ aux zéros extérieurs. On a ainsi une fonction asymétrique des α_i exprimée à l'aide de l'intégrale $K(r)$.

En prenant pour r une limite inférieure γ des modules des α_i , la somme $\sum_{(2)}$ et le terme logarithmique disparaissent dans le second membre de (42) et cette formule se réduit à

$$(43) \quad K(\gamma) = \sum \lambda \left(\frac{\gamma}{\alpha_k} \right) + g_0 \log f(0),$$

exprimant, ainsi, une fonction symétrique des α_i à l'aide de $K(r)$.

2. Les fonctions symétriques et asymétriques des α_i peuvent aussi s'exprimer par l'intégrale précédente

$$H(r) = \int_a^b \varphi(t) F(r, t) dt.$$

En partant de la formule (21) qui se réduit ici à

$$(44) \quad H(r) = \sum_1^n B \left(\frac{\alpha_k}{r} \right)$$

et en remarquant que si l'on suppose le rayon de convergence R de la série correspondante

$$\mu(x) = \sum_1^\infty g_n x^n$$

au moins égal à 1 on a

$$\begin{aligned} B(x) &= g_0 + \mu(x) && \text{pour } |x| < 1, \\ B(x) &= -\mu\left(\frac{1}{x}\right) && \text{pour } |x| > 1, \end{aligned}$$

on arrive à la formule

$$(45) \quad H(r) = ng_0 + \sum_{(1)} \mu\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) - \sum_{(2)} \mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right),$$

exprimant une fonction asymétrique des α_i par l'intégrale $H(r)$.

En prenant $r = \gamma$ on aurait la fonction symétrique

$$(46) \quad \sum \mu\left(\frac{\alpha_k}{\gamma}\right),$$

étendue à tous les α_i , exprimée à l'aide de $H(r)$.

En choisissant pour $\varphi(t)$ une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, p]$, où p est un entier positif, la fonction $\mu(x)$ sera un polynome en x , la somme $\sum \mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)$ étendue à tous les α_i se calculerait à l'aide des coefficients de $f(z)$, et l'on aura la fonction symétrique

$$\sum \left[\mu\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) + \mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) \right],$$

étendue aux α_i intérieurs à c , exprimée à l'aide de $H(r)$ et des coefficients de $f(z)$.

3. On peut encore exprimer les fonctions symétriques et asymétriques des α_i par l'intégrale

$$(47) \quad L(r) = \int_a^b \varphi(t) \Phi(r, t) dt,$$

où $\Phi(r, t)$ désigne la partie réelle de la dérivée logarithmique de $f(z)$ le long de la circonférence C ; on

trouve aisément

$$L(r) = \frac{1}{r} \sum A \left(\frac{\alpha_k}{r} \right)$$

avec

$$A(x) = -\frac{1}{2} \frac{dI}{dx},$$

ce qui conduit à la formule

$$(48) \quad L(r) = \sum_{(1)} \frac{1}{\alpha_k} \mu \left(\frac{\alpha_k}{r} \right) - \sum_{(2)} \left[\frac{g_0}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k} \mu \left(\frac{r}{\alpha_k} \right) \right],$$

exprimant une fonction asymétrique des α_i par $L(r)$.

On en tire aussi la formule

$$(49) \quad L(\gamma) = - \sum \left[\frac{g_0}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k} \mu \left(\frac{r}{\alpha_k} \right) \right],$$

exprimant une fonction symétrique des α_i par $L(r)$.

En prenant pour $\varphi(t)$ une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$, l'intégrale

$$(50) \quad -\frac{1}{g_0} L(r)$$

aura pour valeur la somme des inverses des α_i extérieurs à la circonférence C; en appliquant la proposition au polynôme

$$z^n f \left(\frac{1}{z} \right),$$

l'expression correspondante (50) aura pour valeur la somme des α_i intérieurs à c.

Remarquons aussi, pour terminer, que la plupart de ces résultats s'appliquent manifestement encore aux cas où $f(z)$ est une fonction transcendante entière du genre zéro et conduisent, entre autres conséquences, à diverses formules sommatoires connues ou nouvelles.
