

G. FONTENÉ

Sur les quadrangles de Desboves

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 8
(1908), p. 16-20

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__16_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K8f]

SUR LES QUADRANGLES DE DESBOYES ;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Considérons un quadrangle ABCD, et posons

$$\begin{aligned} AB = a, & \quad BC = b, & \quad CD = c, \\ DA = d, & \quad AC = e, & \quad BD = f. \end{aligned}$$

D'une part, les quatre triangles que l'on obtient en supprimant l'un ou l'autre des quatre points A, B, C, D ont respectivement pour côtés

$$fbc, \quad ecd, \quad fda, \quad eab.$$

D'autre part, les trois couples de côtés opposés du quadrangle sont

$$a \text{ et } c, \quad b \text{ et } d, \quad e \text{ et } f.$$

2. La relation qui a lieu entre les longueurs des six côtés d'un quadrangle a été établie par Carnot au moyen de celle qui a lieu entre les cosinus de trois angles liés par l'une des relations $\lambda \pm \mu \pm \nu = 2k\pi$. On peut lui donner la forme très symétrique

$$\begin{aligned} & a^2 c^2 (e^2 + f^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2) \\ & + b^2 d^2 (e^2 + f^2 + a^2 + c^2 - b^2 - d^2) \\ & + e^2 f^2 (a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - e^2 - f^2) \\ & - (f^2 b^2 c^2 + e^2 c^2 d^2 + f^2 d^2 a^2 + e^2 a^2 b^2) = 0. \end{aligned}$$

3. On peut écrire

$$\begin{aligned} & (a^2 + c^2)(b^2 d^2 + e^2 f^2 - a^2 c^2) + \dots + \dots \\ & - (f^2 b^2 c^2 + e^2 c^2 d^2 + f^2 d^2 a^2 + e^2 a^2 b^2) = 0, \end{aligned}$$

(17)

d'où, en complétant le carré dans la seconde ligne,

$$(a^2 + c^2) [(bd + ef)^2 - a^2 c^2] + \dots + \dots \\ - (fbc + ecd + fda + eab)^2 = 0,$$

ou enfin

$$(ac + bd + ef) [(a^2 + c^2)(bd + ef - ac) + \dots + \dots] \\ - (fbc + ecd + fda + eab)^2 = 0.$$

La relation de Carnot ayant lieu entre les carrés des longueurs des six côtés du quadrangle, nous pouvons changer par exemple e en $-e$, ce qui donne (en multipliant par -1) :

$$(ac + bd - ef) \left[\begin{array}{l} (a^2 + c^2)(ac - bd + ef) \\ + (b^2 + d^2)(bd - ac + ef) \\ - (e^2 + f^2)(ef + ac + bd) \end{array} \right] \\ + (fbc - ecd + fda - eab)^2 = 0.$$

4. Dès lors, si les côtés d'un quadrangle satisfont à la relation

$$(1) \quad fbc - ecd + fda - eab = 0,$$

ils satisfont à l'une ou à l'autre des deux relations

$$(2) \quad ac + bd - ef = 0,$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a^2 + c^2)(ac - bd + ef) \\ + (b^2 + d^2)(bd - ac + ef) \\ - (e^2 + f^2)(ef + ac + bd) \end{array} \right. = 0,$$

et réciproquement.

Sauf la forme très symétrique que nous donnons ici à la relation (3), le résultat précédent appartient à Desboves, qui l'a énoncé sans démonstration (*Nouvelles Annales*, 1877, p. 227); Desboves écrit l'hypothèse sous la forme

$$(1') \quad \frac{e}{f} = \frac{da + bc}{dc + ab},$$

et la conclusion sous la forme

$$(2') \quad ef = ac + bd,$$

ou bien

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} (a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - e^2 - f^2)(ac + bd + ef) \\ - 2(da + bc)(dc + ab) = 0. \end{array} \right.$$

M. Moret-Blanc (*N. A.*, 1878, p. 263) a justifié l'énoncé de Desboves en vérifiant que la relation de Carnot, prise sous forme non symétrique, peut s'écrire

$$\begin{aligned} (ac + bd - ef) \times \varphi(a, b, \dots) \\ + [e(dc + ab) - f(da + bc)]^2 = 0, \end{aligned}$$

φ étant le premier nombre de la relation (3'); j'ai conservé le principe de cette démonstration.

5. L'hypothèse étant prise sous la forme (1'), le calcul suivant n'est pas sans intérêt. Désignons par k la quantité $\frac{da + bc}{dc + ab}$. La relation de Carnot, transformée par l'hypothèse $e = kf$, devient

$$\begin{aligned} -k^2(k^2 + 1)f^6 + k^2f^3(a^2 + c^2 + b^2 + d^2) + \dots \\ - (a^2c^2 - b^2d^2)(a^2 + c^2 - b^2 - d^2) = 0, \end{aligned}$$

et cette relation est certainement satisfaite si l'on a (cas du quadrangle inscriptible)

$$kf.f = ac + bd;$$

le premier membre de cette relation est donc divisible par $kf^2 - (ac + bd)$, et le quotient, calculé avec les seuls termes que l'on a écrits, est

$$\begin{aligned} -k^2(k^2 + 1)f^3 + kf^2(a^2 + c^2 + b^2 + d^2) - (k^2 + 1)f^2(ac + bd) \\ + (ac - bd)(a^2 + c^2 - b^2 - d^2); \end{aligned}$$

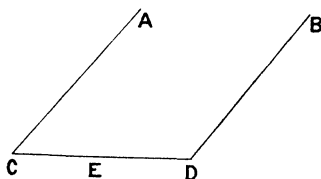
en remplaçant $k f$ par e , et en égalant à zéro, on trouve la relation (3) sous la forme

$$ef(a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - e^2 - f^2) - (ac + bd)(e^2 + f^2) + (ac - bd)(a^2 + c^2 - b^2 - d^2) = 0;$$

il suffit de grouper les termes en $a^2 + c^2$, $b^2 + d^2$, $e^2 + f^2$, pour obtenir la forme (3).

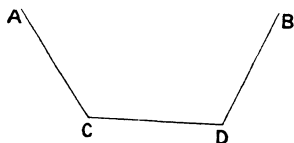
6. Un quadrangle étant supposé inscriptible à un cercle, et l'ordre des sommets sur la circonférence étant A, B, C, D, de sorte que les côtés croisés sont AC

Fig. 1.



et BD, si l'on applique à chacun des quatre triangles de la figure la relation classique $abc = 4RS$, on obtient la relation (1) sous cette forme même.

Fig. 2.



La réciproque n'est exacte qu'à la condition de considérer seulement des quadrangles pour lesquels le contour ABCD est convexe; l'hypothèse (1) entraîne alors la conséquence (2).

En dehors de ce cas, l'hypothèse (1) entraîne la conséquence (3), et l'on a ce que je propose d'appeler un *quadrangle de Desboves*.

Voici des exemples de tels quadrangles. Si l'on suppose $e = f$ dans la relation (1'), on a $(d - b)(c - a) = 0$, et nous prendrons par exemple $b = d$. Avec la relation (2'), on a un trapèze isoscèle avec ses diagonales, les diagonales étant e et f . Avec la relation (3), on peut avoir un trapèze isoscèle avec ses diagonales, les diagonales étant b et d , ou un parallélogramme avec ses diagonales a, c .