

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 523-527

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7_523_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Considérant la surface ayant pour équation en coordonnées rectangulaires*

$$z = y \sin x,$$

1° *Déterminer les lignes asymptotiques γ (autres que les génératrices rectilignes) et montrer qu'elles coupent orthogonalement la génératrice Oy .*

2° *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes γ .*

3° *En un point M de Oy passe une courbe γ . Déterminer le centre de courbure, le rayon de courbure R et la droite polaire Δ de γ au point M .*

4° *Variation de R quand M décrit Oy .*

5° *Lignes asymptotiques de la surface décrite par Δ quand M décrit Oy .*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale double*

$$\iint \frac{dx dy}{+\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

(524)

étendue à l'aire du triangle limité par les trois droites

$$\begin{aligned}x &= 1, \\y &= 0, \\x - y - a &= 0 \\(0 < a < 1).\end{aligned}$$

Valeur limite pour $a = 0$.

(Juin 1907.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégration des équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients constants.*

II. *Déterminer une surface S vérifiant l'équation aux dérivées partielles*

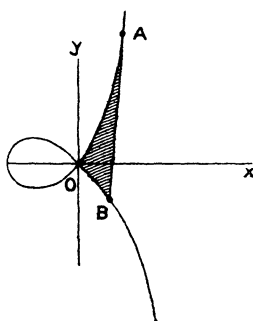
$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

et passant par la courbe

$$\begin{aligned}x &= y, \\z &= x^3.\end{aligned}$$

Chercher les lignes asymptotiques de cette surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la courbe unicursale*



$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2},$$

et, sur elle, deux points A et B correspondant aux

$$t_1 = \tan \alpha, \quad t_2 = \tan \beta,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Déterminer l'aire du triangle curviligne AOB.

(Novembre 1907.)

Dijon.

PREMIÈRE QUESTION. — On considère, en coordonnées rectangulaires, le cylindre d'équation $y = x^n$, où n est une constante donnée. Trouver une courbe située sur ce cylindre, et telle que le plan osculateur en chaque point M de cette courbe passe par la projection orthogonale P de M sur l'axe Oy.

C étant une courbe possédant cette propriété, on considère la surface engendrée par la droite MP quand M décrit C. Trouver les lignes asymptotiques de cette surface.

DEUXIÈME QUESTION. — Intégrer l'équation

$$\frac{dy}{dx} + P(x)(y^2 - x^2) = 1 = 0,$$

où $P(x)$ est une fonction donnée de x .

Chercher quelles conditions doit remplir P pour que l'équation n'admette en y que des solutions qui soient fonctions rationnelles de x . (Juillet 1907.)

I. Exposer la théorie des lignes géodésiques d'une surface, en se bornant à la définition de ces lignes par la propriété du plan osculateur, et laissant de côté ce qui concerne les questions de minimum de distance.

II. Former l'équation différentielle de lignes géodésiques et l'hélicoïde engendré par une droite qui rencontre constamment une hélice circulaire donnée ainsi que son axe, et qui reste perpendiculaire à cet axe.

Montrer qu'on peut intégrer cette équation par les fonctions elliptiques. (Novembre 1907.)

Grenoble.

COMPOSITION. — Une surface S est définie par les équations

$$(1) \quad x = -\frac{1}{u'_\alpha}, \quad y = \beta x, \quad z = \alpha + ux,$$

dans lesquelles u est une fonction donnée des deux paramètres arbitraires α, β . On demande : 1° les équations du plan tangent et de la normale en un point de S ; 2° l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface.

On remarquera : 3° que les courbes coordonnées

$$\alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}$$

sont conjuguées, et l'on montrera : 4° que la développable circonscrite à S , le long d'une courbe $\alpha = \text{const.}$, est un cône dont le sommet est sur Oz ; et 5° que dans le cas où la fonction u est donnée de la forme $u = AB + \alpha B_1 + B_2$, A ne dépendant que de α , et B, B_1, B_2 seulement de β , la développable circonscrite à une courbe $\beta = \text{const.}$ est aussi un cône.

Enfin 6° on fera voir que, dans le cas où les fonctions B_1 et B_2 sont linéaires, la détermination des lignes asymptotiques ne dépend que de simples quadratures.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer l'équation

$$(px + qy - z)^2 (x^2 + y^2) - 2(px + qy - z) - p^2 - q^2 = 0.$$

(Novembre 1907.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. On considère la fonction $f(u)$, où l'on a posé, pour abréger, $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; on demande :
1° De calculer en fonction de u l'expression

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2};$$

2° D'évaluer l'intégrale triple

$$\int \int \int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dx dy dz$$

étendue au volume compris entre deux sphères ayant pour centre l'origine et pour rayons a et b :

3° De déterminer la fonction $f(u)$ de façon qu'elle satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{4} \frac{f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

II. Définition et détermination du plan osculateur.

III. Par chaque point M de la courbe représentée par les équations

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3,$$

on trace la droite D parallèle au plan xOy et rencontrant l'axe Oz . Montrer que cette droite est contenue dans le plan osculateur de la courbe au point M . Déterminer les lignes asymptotiques de la surface lieu de la droite D .

(Octobre 1907.)