

R. BRICARD

Sur le problème d'Apollonius et sur quelques propriétés des cycles

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 491-506

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__491_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K11e, K12bz]

**SUR LE PROBLÈME D'APOLLONIUS
ET SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CYCLES;**

PAR M. R. BRICARD.

1. Le problème d'Apollonius :

Construire un cercle tangent à trois cercles donnés,

a souvent attiré l'attention des géomètres. On connaît les solutions de Viète, de Gergonne et celle, plus récente, de M. Fouché. Laguerre y a trouvé une application élégante de la Géométrie de direction, qu'il avait créée, et a ramené le problème, au moyen d'une transformation par semi-droites réciproques, à la construction du cercle qui passe par trois points donnés.

C'est également l'application des principes de la Géométrie de direction qui m'a conduit à une construction que je crois nouvelle et plus simple que toutes les constructions antérieures. Cette construction permet, comme on le verra, de déterminer *individuellement*, par des constructions linéaires, les divers cercles tangents à trois cercles donnés, quand on suppose connues les diverses tangentes communes à ces trois cercles pris deux à deux.

2. Dans un précédent article ⁽¹⁾, j'ai montré com-

⁽¹⁾ *Nouvelles Annales*, 1906, p. 159.

ment on peut représenter les semi-droites et les cycles d'un plan par les points d'un cône du second ordre (S) et les coniques tracées sur ce cône. La représentation jouit des propriétés suivantes :

1° *Des semi-droites parallèles sont représentées par des points du cône (S) situés sur une même génératrice;*

2° *Une semi-droite et un cycle tangents sont représentés par un point et une conique qui contient ce point;*

3° *Deux cycles tangents sont représentés par deux coniques tangentes;*

4° *Si une semi-droite varie en restant tangente à un cycle, il y a correspondance homographique entre la division formée par les points de contact sur le cycle et la division formée par les points représentatifs de la semi-droite variable sur la conique représentative du cycle.*

D'après la propriété 1°, toute génératrice du cône peut être considérée comme représentant une *direction* de semi-droites. On appellera alors *rapport anharmonique* de quatre semi-droites, le rapport anharmonique des quatre génératrices qui représentent leurs directions. De même, six semi-droites seront dites *en involution*, quand les six génératrices représentatives de leurs directions seront elles-mêmes en involution sur le cône.

Dans son premier Mémoire sur la Géométrie de direction (¹), Laguerre a défini comme il suit l'involution de six semi-droites : *Soient six semi-droites*

(¹) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1879-1880; *Œuvres*, t. II, p. 592.

données et menons à un cycle quelconque les six tangentes qui leur sont parallèles; on dira que les semi-droites dont il s'agit sont en involution quand les points de contact sont eux-mêmes en involution sur le cycle.

Il est facile de constater l'identité des deux définitions. Considérons six semi-droites en involution, au sens de Laguerre, et soit C le cycle auquel on mène des tangentes parallèles à ces six semi-droites. Soit sur le cône (S) Γ la conique représentative du cycle C. Les tangentes au cycle C, parallèles aux semi-droites considérées, ont leurs six points de contact en involution; donc les points représentatifs de ces tangentes sont eux-mêmes en involution sur Γ , et les génératrices de (S) qui contiennent ces six points sont aussi en involution; les six semi-droites sont donc en involution, au sens que j'ai donné plus haut.

La considération des semi-droites en involution jouera un rôle important dans tout ce qui suit.

3. Je supposerai, comme dans l'article rappelé plus haut, que le cône (S) a pour équation

$$(1) \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Les coordonnées d'un point quelconque m de ce cône peuvent être représentées par les formules

$$(2) \quad x = \lambda^2 - \mu^2, \quad y = 2\lambda\mu, \quad z = \lambda^2 + \mu^2.$$

Je dirai que λ, μ sont les *paramètres* du point m , et aussi de la semi-droite représentée par le point m . A un système de paramètres λ, μ ne correspond qu'un point m ; *mais la réciproque n'est pas vraie* : à un point m correspondent deux systèmes opposés de paramètres (λ, μ) et $(-\lambda, -\mu)$.

Le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ a une valeur constante et unique pour tous les points du cône (S) qui sont alignés sur une même génératrice. On en conclut, et cette remarque servira tout à l'heure, que six semi-droites sont en involution quand les valeurs du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ correspondant aux génératrices représentatives de ces six semi-droites sont elles-mêmes en involution.

Considérons maintenant les divers cycles tangents à un même cycle C. On peut supposer, grâce à une transformation homographique changeant le cône (S) en lui-même, et convenablement choisie, que le cycle C est représenté par la conique à l'infini Γ de ce dernier, conique dont l'équation tangentielle est

$$(3) \quad u^2 + v^2 - w^2 = 0.$$

Ainsi, tout cycle tangent à C est représenté par une conique située dans un plan

$$ux + vy + wz - 2 = 0,$$

u , v et w satisfaisant à (3). (Je prends le terme constant égal à -2 pour simplifier les formules ultérieures.)

On satisfait à l'équation (3) en posant

$$(4) \quad u = l^2 - m^2, \quad v = 2lm, \quad w = l^2 + m^2.$$

Je dirai que l , m sont les *paramètres* d'une conique tangente à Γ (ou d'un cycle tangent à C). Une telle conique a deux systèmes de paramètres (l, m) et $(-l, -m)$.

Exprimons maintenant qu'un point, de paramètres λ, μ , est sur une conique de paramètres l, m . On a la condition

$$(l^2 - m^2)(\lambda^2 - \mu^2) + 4lm\lambda\mu + (l^2 + m^2)(\lambda^2 + \mu^2) = 2,$$

qui se réduit à

$$(l\lambda + m\mu)^2 = 1$$

ou

$$(5) \quad l\lambda + m\mu = \pm 1.$$

Le fait que la condition cherchée se décompose est fondamental dans cette étude.

Le point où la conique de paramètres l, m touche la conique Γ a des paramètres qui satisfont à la relation (5) et qui, de plus, sont *infinis*, puisque ce point est rejeté à l'infini. On peut donc ici remplacer la relation (5) par la suivante

$$(6) \quad l\lambda + m\mu = 0.$$

Ainsi la tangente commune au cycle C et au cycle de paramètres l, m a des paramètres infinis, satisfaisant à la relation (6). Cette remarque sera utile tout à l'heure.

4. La relation (5) va permettre d'établir des relations remarquables qui existent entre les cycles tangents à trois cycles et les tangentes communes à ces trois cycles pris deux à deux.

Soit toujours C le cycle représenté par la conique Γ dont l'équation tangentielle est l'équation (3), et soient C_1, C_2, C_3 trois cycles tangents à C; appelons $(l_1, m_1), (l_2, m_2), (l_3, m_3)$ leurs paramètres respectifs. On obtiendra les paramètres des tangentes communes à C_2 et à C_3 en résolvant le système

$$l_2\lambda + m_2\mu = \pm 1, \quad l_3\lambda + m_3\mu = \pm 1.$$

Il existe pour les seconds membres quatre combinaisons de signes possibles, mais ces combinaisons donnent pour λ et μ des systèmes de valeurs opposées

deux à deux. On peut donc se borner à considérer les deux systèmes

$$l_2\lambda + m_2\mu = 1, \quad l_3\lambda + m_3\mu = 1$$

et

$$l_2\lambda + m_2\mu = 1, \quad l_3\lambda + m_3\mu = -1.$$

Ces deux systèmes d'équations, résolus en λ , μ , fournissent les paramètres des deux tangentes A_1 et A'_1 communes à C_2 et C_3 . Les paramètres λ_1 , μ_1 de la première satisfont à la relation

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{m_3 - m_2}{l_2 - l_3},$$

et ceux λ'_1 , μ'_1 de la seconde, à la relation

$$\frac{\lambda'_1}{\mu'_1} = \frac{m_2 + m_3}{-(l_2 + l_3)}.$$

Il est inutile d'écrire les valeurs complètes de λ_1 , μ_1 , λ'_1 , μ'_1 .

De même les tangentes A_2 et A'_2 communes aux cycles C_3 et C_1 , et les tangentes A_3 et A'_3 communes aux cycles C_1 et C_2 ont des paramètres λ_2 , ..., μ'_3 satisfaisant aux équations

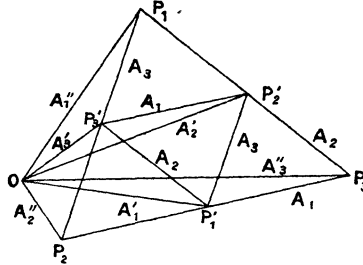
$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2}{\mu_2} &= \frac{m_1 - m_3}{l_3 - l_1}, & \frac{\lambda'_2}{\mu'_2} &= \frac{m_3 + m_1}{-(l_3 + l_1)}, \\ \frac{\lambda_3}{\mu_3} &= \frac{m_2 - m_1}{l_1 - l_2}, & \frac{\lambda'_3}{\mu'_3} &= \frac{m_1 + m_2}{-(l_1 + l_2)}. \end{aligned}$$

Enfin, les cycles C_1 , C_2 , C_3 touchent le cycle C en trois points, et les tangentes A''_1 , A''_2 , A''_3 en ces trois points ont des paramètres tous infinis et satisfaisant aux relations

$$\frac{\lambda''_1}{\mu''_1} = -\frac{m_1}{l_1}, \quad \frac{\lambda''_2}{\mu''_2} = -\frac{m_2}{l_2}, \quad \frac{\lambda''_3}{\mu''_3} = -\frac{m_3}{l_3}.$$

Il est facile de se rendre compte géométriquement des relations qui existent entre les neuf quantités $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\frac{\lambda'_1}{\mu'_1}$, ..., $\frac{\lambda''_3}{\mu''_3}$. Figurons dans un plan (*fig. 1*) les points

Fig. 1.



P_1 de coordonnées $(-l_1, m_1)$, P_2 de coordonnées $(-l_2, m_2)$, P_3 de coordonnées $(-l_3, m_3)$. Soient, enfin, P'_1 , P'_2 , P'_3 les milieux des côtés du triangle $P_1P_2P_3$. P'_1 , par exemple, a pour coordonnées

$$-\frac{l_2 + l_3}{2}, \quad \frac{m_2 + m_3}{2}.$$

Joignons les points P_1 , P_2 , P_3 , P'_1 , P'_2 , P'_3 à l'origine O . On voit immédiatement que les neuf quantités $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, ..., $\frac{\lambda''_3}{\mu''_3}$ sont les coefficients angulaires des diverses droites de la figure.

$\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est le coefficient angulaire de P_2P_3 ou $P'_2P'_3$;

$\frac{\lambda'_1}{\mu'_1}$ » » OP'_1 ;

$\frac{\lambda''_1}{\mu''_1}$ » » OP_1 ;

.....

Les rapports $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, ..., $\frac{\lambda''_3}{\mu''_3}$ représentent, comme on l'a

vu, les directions des tangentes $A_1, \dots, A_3''$. On a inscrit sur la figure, en regard de chaque ligne, le symbole de la tangente correspondante.

Cela posé, on sait que les côtés d'un quadrangle quelconque ont leurs coefficients angulaires en involution. Appliquons cette propriété au quadrangle $O_1 P P'_2 P'_3$. On voit *que les six semi-droites* $(A_1'', A_1), (A_2, A'_3), (A_3, A'_2)$ *forment trois couples en involution.*

Cette proposition fournit immédiatement la solution du problème d'Apollonius.

En effet, si l'on suppose connues les tangentes communes aux trois cycles C_1, C_2, C_3 , on voit que des six droites désignées plus haut, les cinq dernières sont connues. On peut donc construire la première, c'est-à-dire le point de contact avec le cycle C_1 de l'un des cycles tangents à C_1, C_2, C_3 , ce qui se fait simplement en appliquant la définition de Laguerre (n° 2). On est ainsi conduit à la construction suivante :

Soient C_1, C_2, C_3 trois cycles donnés (fig. 2), $A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3, A'_3$ les tangentes communes à ces cycles pris deux à deux. Soient $\alpha_2, \alpha'_2, \alpha_3, \alpha'_3$ les points de contact avec C_1 de A_2, A'_2, A_3, A'_3 . Menons à C_1 la tangente parallèle à la semi-droite A_1 , et soit α son point de contact. Joignons α au point de rencontre des droites $\alpha_2 \alpha'_3, \alpha_3 \alpha'_2$. La droite ainsi obtenue rencontre C_1 au point β_1 , qui est le point de contact avec C_1 de l'un des deux cycles tangents à C_1, C_2, C_3 .

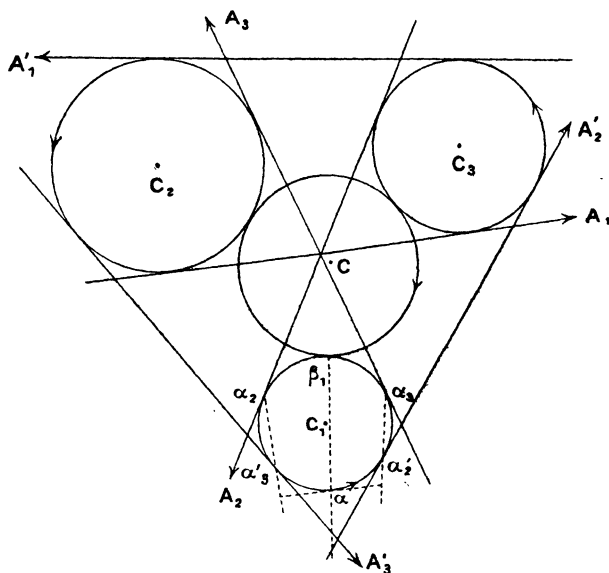
On obtiendra d'une manière analogue les points de contact de ce même cycle avec C_2 et avec C_3 .

On peut répartir de huit manières différentes les six tangentes communes à C_1, C_2, C_3 , en deux triangles, dont les côtés touchent respectivement C_2 et C_3, C_3 et C_1 ,

C_1 et C_2 . Ces huit répartitions sont les suivantes :

$A_1 A_2 A_3$	et	$A'_1 A'_2 A'_3$,	$A'_1 A'_2 A'_3$	et	$A_1 A_2 A_3$,
$A_1 A'_2 A'_3$	et	$A'_1 A_2 A_3$,	$A'_1 A_2 A_3$	et	$A_1 A'_2 A'_3$,
$A'_1 A_2 A'_3$	et	$A_1 A'_2 A_3$,	$A_1 A'_2 A_3$	et	$A'_1 A_2 A'_3$,
$A'_1 A'_2 A_3$	et	$A_1 A_2 A'_3$,	$A_1 A_2 A'_3$	et	$A'_1 A'_2 A_3$.

Fig. 2 (1).



La construction énoncée plus haut répond au premier de ces huit groupements. Il est visible que si l'on permute les rôles assignés à A_2 et A'_2 , A_3 et A'_3 , ce qui fait passer du premier groupement à celui qui est inscrit immédiatement au-dessous, le point β_1 obtenu dans la construction sera le même et, par suite, on sera conduit au même cycle que la première fois. La même remarque

(1) C'est par hasard que les trois droites A_1 , A_2 , A_3 sont concourantes sur la figure.

s'applique aux deux autres groupements qui figurent dans la même colonne que le premier.

Ainsi : *A tout groupement des tangentes communes en deux triangles correspondent l'un des deux cycles tangents à C_1, C_2, C_3 . Les quatre groupements qui figurent dans la première colonne du Tableau précédent correspondent au même cycle; les quatre autres groupements correspondent évidemment à l'autre cycle.*

On peut aussi ne considérer dans un groupement de tangentes en deux triangles que le *premier* de ces triangles. Nous dirons que le cycle C tangent à C_1, C_2, C_3 *correspond* à l'un quelconque des triangles

$$A_1 A_2 A_3, \quad A_1 A'_2 A'_3, \quad A'_1 A_2 A'_3, \quad A'_1 A'_2 A_3.$$

L'autre cycle tangent à C_1, C_2, C_3 correspond à l'un quelconque des triangles

$$A_1 A'_2 A'_3, \quad A'_1 A_2 A_3, \quad A_1 A'_2 A_3, \quad A_1 A_2 A'_3.$$

La solution que je viens d'exposer du problème d'Apollonius me paraît, comme je l'ai dit, particulièrement simple. Elle n'est malheureusement pas applicable dans tous les cas de figure (par exemple, dans celui où deux des cycles, extérieurs l'un à l'autre, sont intérieurs au troisième).

5. La figure 1 contient d'autres quadrangles complets que ceux dont la considération a conduit à la solution du problème d'Apollonius. En premier lieu, le quadrangle $OP_1 P'_2 P'_3$ donne immédiatement le théorème suivant :

Les tangentes communes à trois cycles pris deux à deux sont six semi-droites en involution.

En second lieu, la considération du quadrangle $OP_1P_2P_3$ montre que (A_1, A_1'') , (A_2, A_2'') , (A_3, A_3'') forment trois couples en involution; ainsi :

Soient C_1, C_2, C_3 trois cycles et C l'un des cycles qui leur sont tangents. Les tangentes à C , aux points de contact avec C_1, C_2, C_3 , et trois tangentes communes aux cycles C_1, C_2, C_3 pris deux à deux, et convenablement choisies, sont six droites en involution.

On voit que les trois tangentes communes doivent être choisies de manière à constituer l'un des quatre triangles correspondant au cycle C . Les quatre autres triangles que l'on peut former avec les tangentes communes aux cycles C_1, C_2, C_3 pris deux à deux, ont leurs côtés en involution avec les tangentes aux points de contact des cycles C_1, C_2, C_3 avec le second cycle qui les touche.

6. Je vais maintenant développer quelques conséquences des formules qui ont joué dans les recherches précédentes un rôle fondamental. En premier lieu, on a le théorème suivant :

Soient $(A'_1, B_1), (A'_2, B_2), (A'_3, B_3)$ trois couples de semi-droites parallèles. Les cycles inscrits dans les triangles $A'_1A'_2A'_3, A'_1B_2B_3, B_1A'_2B_3, B_1B_2A'_3$ sont tangents à un même cycle. Il en est de même des cycles inscrits dans les triangles $B_1B_2B_3, B_1A'_2A'_3, A'_1B_2A'_3, A'_1A'_2B_3$.

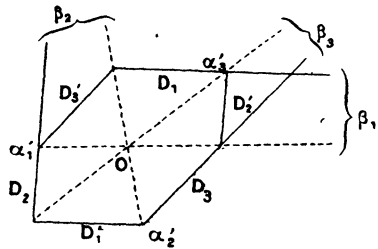
Démontrons, par exemple, la seconde partie de l'énoncé.

Soient C_1, C_2, C_3 les cycles inscrits dans les triangles $B_1A'_2A'_3, A'_1B_2A'_3, A'_1A'_2B_3$. Appelons C le

cycle tangent à C_1, C_2, C_3 , et choisi de telle manière qu'il *ne corresponde pas* au triangle de tangentes communes $A'_1 A'_2 A'_3$, au sens indiqué plus haut. Toutes les notations employées au numéro précédent sont applicables.

Figurons sur le plan (*fig. 3*) les deux droites D_1 et D'_1

Fig. 3.



dont les équations respectives sont

$$l_1 \lambda + m_1 \mu = 1, \quad l_1 \lambda + m_1 \mu = -1,$$

λ et μ étant des coordonnées courantes.

Les droites D_1 et D'_1 sont symétriques par rapport à l'origine O . Figurons les droites analogues D_2 et D'_2 , D_3 et D'_3 .

Les paramètres de la semi-droite A'_1 satisfont, comme on l'a vu, aux équations

$$l_2 \lambda + m_2 \mu = 1, \quad l_3 \lambda + m_3 \mu = -1.$$

Ces paramètres sont donc les coordonnées du point α'_1 commun aux droites D_2 et D'_3 . De même, les six semi-droites A'_2 et A'_3 peuvent être représentées par les points α'_2 et α'_3 de la figure.

Soient maintenant $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ des points ayant pour coordonnées les systèmes de paramètres des semi-droites B_1, B_2, B_3 . Le point β_1 doit être en ligne droite

avec le point α'_1 , puisque B_1 et A'_1 sont parallèles, et situé sur l'une des droites D_1 et D'_1 , puisque ses coordonnées satisfont à l'une des équations

$$l_1\lambda + m_1\mu = 1, \quad l_1\lambda + m_1\mu = -1.$$

Les deux points satisfaisant à ces équations sont symétriques par rapport au point O . Comme ils représentent tous les deux la même semi-droite, on peut supposer que le point β_1 est sur D_1 . Le point β_1 est ainsi le point commun aux droites D_1 , $O\alpha'_1$. De même, β_2 est le point commun aux droites D_2 , $O\alpha'_2$ et β_3 , le point commun aux droites D_3 , $O\alpha'_3$.

Les points β_1 , β_2 , β_3 sont en ligne droite : on le voit tout de suite en appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone dont les côtés consécutifs sont $O\alpha'_1$, D_2 , $O\alpha'_3$, D_1 , $O\alpha'_2$, D_3 et qui est inscrit à une conique, puisqu'il a un centre.

Il existe donc des coefficients l , m , tels que l'équation

$$l\lambda + m\mu = 1$$

soit satisfaite par les coordonnées des points β_1 , β_2 , β_3 . Cela revient à dire qu'il existe un cycle tangent aux semi-droites B_1 , B_2 , B_3 et au cycle C . On démontrerait de même la seconde partie de l'énoncé.

7. Trois couples de semi-droites en involution jouissent de la même propriété que trois couples de semi-droites parallèles. Autrement dit :

Soient (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) trois couples de semi-droites en involution. Les cycles inscrits dans les triangles $A_1A_2A_3$, $A_1B_2B_3$, $B_1A_2B_3$, $B_1B_2A_3$ sont inscrits à un même cycle. Il en est de même des

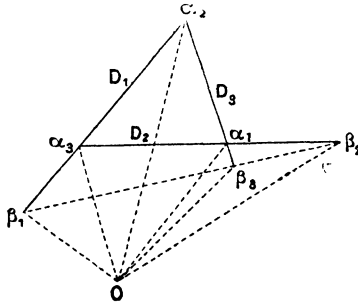
cycles inscrits dans les triangles $B_1 B_2 B_3$, $B_1 A_2 A_3$, $A_1 B_2 A_3$, $A_1 A_2 B_3$.

Démontrons cette fois la première partie de l'énoncé.

Soient C_1 , C_2 , C_3 les cycles inscrits dans les triangles $A_1 B_2 B_3$, $B_1 A_2 B_3$, $B_1 B_2 A_3$. Appelons C le cycle tangent aux cycles C_1 , C_2 , C_3 , et qui *correspond* au triangle de tangentes communes $A_1 A_2 A_3$. Appliquons encore les notations des n^{os} 5 et 6.

Figuons sur le plan (*fig. 4*) les droites D_1 , D_2 , D_3

Fig. 4.



ayant pour équations respectives

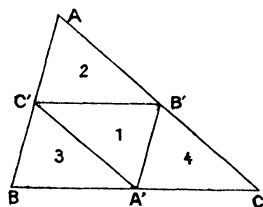
$$l_1 \lambda + m_1 \mu = 1, \quad l_2 \lambda + m_2 \mu = 1, \quad l_3 \lambda + m_3 \mu = 1.$$

Les semi-droites A_1 , A_2 , A_3 seront figurées respectivement par les points α_1 , α_2 , α_3 , sommets du triangle formé par les droites D_1 , D_2 , D_3 . Les points β_1 , β_2 , β_3 qui représentent les semi-droites B_1 , B_2 , B_3 appartiennent respectivement aux droites D_1 , D_2 , D_3 et doivent être tels que les droites $O\beta_1$, $O\beta_2$, $O\beta_3$ forment un faisceau en involution avec les droites $O\alpha_1$, $O\alpha_2$, $O\alpha_3$. Ces points sont donc en ligne droite, et par suite les semi-droites qu'ils représentent forment un

triangle circonscrit à un cycle qui touche les trois cycles C_1, C_2, C_3 .

8. Comme application des théorèmes des n^{os} 6 et 7, considérons un triangle ABC (fig. 5), et appelons A' ,

Fig. 5.



B', C' les milieux de ses côtés. Numérotons les quatre triangles de la figure comme il est indiqué, et désignons respectivement par O^i, O_a^i, O_b^i, O_c^i le cercle inscrit et les cercles ex-inscrits dans le triangle d'indice i ⁽¹⁾.

On peut, de huit manières différentes, donner des sens aux côtés du triangle ABC. En donnant les mêmes sens aux côtés parallèles du triangle $A'B'C'$, on peut appliquer à la figure le théorème du n^o 6. Les semi-droites A_1, A_2, A_3 seront portées par les côtés du triangle ABC, et les semi-droites A'_1, A'_2, A'_3 , par les côtés du triangle $A'B'C'$.

La première partie de l'énoncé fournit alors ce résultat : *les cercles points A', B', C' et l'un quelconque des cercles inscrit ou ex-inscrits au triangle ABC sont tangents à un même cercle. On reconnaît là le théorème de Feuerbach.*

En appliquant maintenant la seconde partie de l'énoncé, et en prenant toutes les combinaisons possibles

⁽¹⁾ Pour abrégé les énoncés, je parlerai ici de *cercles* et non de *cycles*.

de sens pour les semi-droites de la figure, on obtient quatre combinaisons de quatre cercles tangents à un même cercle. Ce sont

$$\begin{array}{l} O^1, \quad O^2, \quad O^3, \quad O^4; \\ O_a^1, \quad O_a^2, \quad O_c^3, \quad O_b^4; \\ O_b^1, \quad O_c^2, \quad O_b^3, \quad O_a^4; \\ O_c^1, \quad O_b^2, \quad O_a^3, \quad O_c^4. \end{array}$$

On peut maintenant appliquer le théorème n° 7, en remarquant que trois couples de semi-droites deux à deux parallèles, mais de sens opposés, forment un système en involution (on le voit immédiatement en appliquant la définition de Laguerre). La première partie de l'énoncé redonne le théorème de Feuerbach. La seconde partie, en combinant les sens de toutes les manières possibles, conduit à quatre nouvelles combinaisons de quatre cercles tangents à un même cercle. Ce sont

$$\begin{array}{l} O^1, \quad O_a^2, \quad O_b^3, \quad O_c^4; \\ O_a^1, \quad O^2, \quad O_a^3, \quad O_a^4; \\ O_b^1, \quad O_b^2, \quad O^3, \quad O_b^4; \\ O_c^1, \quad O_c^2, \quad O_c^3, \quad O^4. \end{array}$$

J'énoncerai, pour terminer, un autre cas particulier simple du théorème du n° 7 :

Soient ABC un triangle, A'B'C' le triangle formé par les tangentes au cercle circonscrit au triangle ABC, aux sommets de ce triangle. Les cercles inscrits dans les triangles ABC, A'BC, AB'C, ABC' sont tangents à un même cercle.
