

## Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 7  
(1907), p. 419-432

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1907\\_4\\_7\\_\\_419\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__419_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

---

*M. A. Gérardin ayant réimprimé dans le Sphinx Œdipe (Nancy) trois questions de M. E. Cesaro, relatives à certaines propriétés arithmétiques du Tableau des puissances de 5, et demeurées non résolues, M. Malo a réussi à les résoudre et les solutions viennent d'être publiées dans le Journal sus-mentionné. Ces questions ayant été proposées ici même en 1883 et 1884, il est naturel que leur solution y soit aussi insérée.*

LA RÉDACTION.

**1432.**

(1883, p. 144.)

*Parmi les chiffres de rang  $4p + 1$  des puissances successives de 5, les chiffres 3 et 8 se trouvent en plus petit nombre*

( 420 )

que les autres. Par exemple, parmi les 640 chiffres de rang 9 (centaines de millions) de 640 puissances successives quelconques de 5, chacun des chiffres 3 et 8 se trouve 60 fois, tandis que chacun des 8 autres chiffres s'y trouve 65 fois.

(E. CESARO).

### 1448.

(1883, p. 287.)

Les chiffres de rang  $n$ , dans les puissances successives d'un nombre quelconque, se reproduisent périodiquement. Pour les puissances de 5, la période se compose de  $2^{n-2}(n > 3)$  termes dont la somme est le double de  $9 \cdot 2^{n-4} - 1$ . Dans cette période, un même chiffre est répété  $\frac{1}{5}(2^{n-3} + \varphi)$  fois;  $\varphi$  ayant, pour chaque chiffre, des valeurs différentes suivant la forme de  $n$ , comme l'indique le Tableau suivant. On a

|              | $n = 4p.$      | $n = 4p + 1.$ | $n = 4p + 2.$ | $n = 4p + 3.$ |
|--------------|----------------|---------------|---------------|---------------|
| Pour 0 et 5. | $\varphi = 3$  | 1             | 2             | — 1           |
| » 1 et 6.    | $\varphi = -2$ | 1             | — 3           | 4             |
| » 2 et 7.    | $\varphi = -2$ | 1             | 2             | — 1           |
| » 3 et 8.    | $\varphi = 3$  | — 4           | 2             | — 1           |
| » 4 et 9.    | $\varphi = -2$ | 1             | — 3           | — 1           |

(E. CESARO.)

### 1485.

(1884, p. 160.)

Ayant pris, au hasard, un chiffre d'une puissance quelconque de 5, il y a avantage à parier que c'est un 5 ou un 0.

(E. CESARO.)

### SOLUTION

Par M. E. MALO.

1. On peut regarder comme un simple point de fait tranché par l'expérience que le chiffre des unités est toujours un 5, celui des dizaines toujours un 2, et celui des centaines un 1 dans les puissances impaires, un 6 dans les puissances paires.

Considérant une de celles-ci, soit

$$5^{2n} = 1000 A_n + 625,$$

$$(421)$$

j'en conclurai

$$5^{2n+1} = 1000(5A_n + 3) + 125 = 1000B_n + 125,$$

puis, en multipliant encore par 5,

$$5^{2n+2} = 1000.5B_n + 625 = 1000A_{n+1} + 625 :$$

il me vient donc

$$A_{n+1} = 5B_n = 25A_n + 15,$$

et, sans nouveau calcul,

$$B_{n+1} = 25B_n + 3.$$

Or je puis considérer que, pour  $n = 2$ , j'ai  $A_2 = 0$ ; j'aurai par conséquent

$$A_3 \equiv 5, \quad A_4 \equiv 0, \quad A_5 \equiv 5, \quad \dots \quad (\text{mod. } 10).$$

De cette même valeur je tire

$$B_2 = 3, \quad B_3 \equiv 8, \quad B_4 \equiv 3, \quad B_5 \equiv 8, \text{ etc. } (\text{mod. } 10).$$

Il est de la sorte acquis que l'on a

$$5^{4n} = 10000A_n + 0625,$$

$$5^{4n+1} = 10000B_n + 3125,$$

$$5^{4n+2} = 10000C_n + 5625,$$

$$5^{4n+3} = 10000D_n + 8125,$$

et il est également clair que l'on a les relations,

$$B_n = 5A_n, \quad C_n = 5B_n + 1, \quad D_n = 5C_n + 2,$$

$$A_{n+1} = 5D_n + 4.$$

Or on peut commencer à  $B_1 = 0$ , d'où

$$C_1 = 1, \quad D_1 = 7,$$

puis

$$A_2 \equiv 9, \quad B_2 \equiv 5, \quad C_2 \equiv 6, \quad D_2 \equiv 2, \quad A_3 \equiv 4, \quad \dots \quad (\text{mod. } 10).$$





point, qui est secondaire, je remarque que, pour  $k = 2^{m-2}$ , on retombe sur la valeur initiale de  $p$  tandis que celle de  $n$  est augmentée d'une unité. On recommence dès lors une nouvelle série de chiffres  $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots$  (ces chiffres devant être modifiés l'un d'après l'autre comme il a été expliqué un peu plus haut) et toute la question est de savoir si  $A_{n+1,p}$  est de même parité que  $A_{n,p}$  ou de parité différente, car dans le premier cas la période serait formée par la série des chiffres  $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots$  (naturels ou majorés de 5), et ne comprendrait que  $2^{m-2}$  termes, tandis que dans le second elle comprendrait en outre une deuxième série de chiffres  $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k \dots \alpha_{2^{m-2}-1}$ , le chiffre  $\alpha_k$  dans cette deuxième série étant majoré de 5 s'il ne l'a pas été dans la première, et réciproquement. Or c'est le deuxième cas qui s'offre essentiellement comme le montre la relation suivante, simple particularisation de l'équation générale du groupe (3),

$$A_{n+1,p} = 5^{2^{m-2}} A_{n,p} + (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{2^{m-2}}),$$

où  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{2^{m-2}})$ , qui désigne le nombre écrit dans le système de numération de base 5 au moyen des chiffres successifs  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ , est un nombre nécessairement impair.

En effet des égalités (1) on déduit

$$\alpha_{p+2} = 25\alpha_p - 10^m(5\alpha_1 + \alpha_2);$$

$$\alpha_{p+3} = 125\alpha_p - 10^m(25\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3),$$

.....

$$\alpha_{p+k} = 5^k \alpha_p - 10^m(5^{k-1}\alpha_1 + 5^{k-2}\alpha_2 + \dots + 5\alpha_{k-1} + \alpha_k),$$

c'est-à-dire, suivant la notation introduite il n'y a qu'un instant,

$$(4) \quad (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k) = \frac{5^k \alpha_p - \alpha_{p+k}}{10^m},$$

et, pour  $k = 2^{m-2}$ ,

$$(5) \quad (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{2^{m-2}}) = \frac{(5^{2^{m-2}} - 1)\alpha_p}{10^m}.$$

Or il est clair, d'abord, que  $\alpha_p$ , nombre terminé par un 5, est nécessairement divisible par  $5^m$ , puisque  $5^{2^{m-2}} - 1$  ne peut admettre le facteur 5; ensuite, que  $5^{2^{m-2}} - 1$ , égal à

$$(2^2 + 1)^{2^{m-2}} - 1,$$

est *exactement* divisible par  $2^m$  et donne pour quotient un nombre impair.

Il est donc établi que *le fait que les chiffres qui sont les coefficients de  $10^m$  dans  $5^{n \cdot 2^{m-1} + p}$  forment une suite périodique de  $2^{m-1}$  termes qui n'est pas décomposable en sous-périodes implique que les chiffres qui sont les coefficients de  $10^{m+1}$  dans  $5^{n \cdot 2^m + q}$  forment une suite périodique de  $2^m$  termes dont la deuxième moitié résulte de la première, chaque chiffre de celle-ci étant augmenté de 5 s'il est moindre que 5, et diminué de 5 s'il est égal ou plus grand.*

3. Certains points cependant demandent à être éclaircis et pour bien s'affermir sur les considérations qui viennent d'être développées il est utile d'en faire une application immédiate : à cet effet, je me proposerai de déterminer la période des chiffres composant la septième colonne du Tableau, c'est-à-dire multipliant  $10^6$  dans les puissances successives de 5. Pour simplifier je prendrai  $a_p = 5^6$  de manière à avoir  $5^{-6} a_p = 1$ ; je n'aurai donc à m'occuper que du nombre  $\frac{5^{16} - 1}{2^6}$ , égal à  $\frac{5^8 - 1}{2^5} \times (5^8 + 1) \times \frac{1}{2}$ , en le considérant dans le système de numération de base 5. Or il est manifeste que  $\frac{5^8 - 1}{2^5}$  est le nombre constituant la période du développement de  $2^{-5}$  suivant les puissances négatives de 5; ce nombre, qu'on peut regarder comme un résultat déjà acquis, est 00342312, composé de huit figures comme on a établi que cela doit être, et c'est un nombre impair, en accord avec la démonstration de l'article 2. On doit le multiplier par  $5^8 + 1 (= 100000001$ , en numération de base 5), c'est-à-dire l'écrire deux fois de suite

$$0034231200342312,$$

puis le diviser par 2, ce qui donne

$$0014340322421131,$$

après quoi il ne restera plus qu'à reproduire les chiffres obtenus tels quels ou majorés de 5, suivant la règle formulée à l'article 2,

$$0019840377976181,$$

( 426 )

pour obtenir la première moitié de la période de 32 chiffres cherchée : la deuxième en résulte par l'addition de 5 aux chiffres moindres que 5 et par la soustraction de 5 opérée sur les chiffres  $\geq 5$ . Il me vient donc pour cette deuxième moitié de la période

$$5564395822421636.$$

Semblablement, de  $2^{-6} = 0,00143\dots$  (base 5) on déduirait, en divisant par 2 le nombre

$$00143403224211310014340322421131,$$

la période de la fraction  $2^{-6} = 0,000442\dots$ , savoir :

$$00044201334330402232142411210313,$$

puis la première demi-période de la colonne  $10^7$  :

$$00044201839835957782197961760363 ;$$

et enfin la seconde :

$$55599756384380402237642416215818.$$

4. Supposant que la puissance  $5^n$  commence par les caractères  $\lambda\mu\nu\dots$ , la puissance  $5^{n+1}$  commencera par les caractères  $\xi\eta\zeta\dots$ , savoir :

$$\xi = \left[ \frac{\lambda}{2} \right], \quad \eta = \left[ \frac{\mu}{2} \right] \quad (\text{pour } \lambda \text{ pair}),$$

et

$$\eta = 5 + \left[ \frac{\mu}{2} \right] \quad (\text{pour } \lambda \text{ impair}),$$

puis

$$\zeta = \left[ \frac{\nu}{2} \right] \quad \text{ou} \quad 5 + \left[ \frac{\nu}{2} \right],$$

suivant la parité de  $\mu$ , etc.

La puissance  $5^{n+1}$  s'exprime donc par un caractère de plus que la puissance  $5^n$ , sauf si celle-ci commence à gauche par le chiffre 1. Cela montre que, considérant les colonnes, celles-ci peuvent être censées commencer par autant de zéros qu'il y a à leur droite de colonnes dont le premier chiffre

significatif, après les zéros envisagés ici par hypothèse même, est un 1. Cette seule remarque suffit à expliquer dans une certaine mesure la prédominance des 0 et des 5 dans les périodes.

D'une façon plus précise, les lignes peuvent être regardées comme débutant par autant de zéros qu'il y a d'unités dans le produit de leur rang par  $\log 2 = 0,30103000$ ; les colonnes comme débutant par autant de zéros qu'il y a d'unités dans le produit de l'exposant de la puissance de 10 à laquelle chacune correspond par le rapport  $\frac{\log 2}{\log 5} = \frac{30103}{69897} = 0,4306765$ .

Ainsi, la puissance  $5^6$  peut être censée commencer par un zéro et la puissance  $5^7$  par deux zéros, parce que l'on a  $6 \times 0,30103 = 1,80618$  et  $7 \times 0,30103 = 2,10721$ . De même la cinquième colonne commence par un zéro parce que l'on a  $4 \times 0,4306765 = 1,72\dots$  et la sixième commence par deux zéros parce que l'on a  $5 \times 0,4306765 = 2,15\dots$

5. Dans les colonnes chaque chiffre est la moitié exacte ou par défaut du chiffre situé dans la colonne contiguë à droite et sur la ligne précédente, ou bien de ce chiffre augmenté de 10, suivant le cas. Cette remarque, en tant que bornée à ce qui vient d'être énoncé, est la répétition de ce qui a été observé plus haut au sujet de la formation des puissances successives, c'est-à-dire des lignes du Tableau. Mais la démonstration même de la périodicité des chiffres dans les colonnes établit en outre qu'en considérant une période entière, c'est-à-dire deux périodes de la colonne contiguë à droite, cette addition de 10 s'opérera dans la moitié des cas, soit  $2^{m-2}$  fois pour la colonne  $10^m$ ; semblablement les divisions sans reste s'opéreront dans moitié des cas, soit encore  $2^{m-2}$  fois pour la colonne  $10^m$  <sup>(1)</sup>.

Par conséquent, en désignant par  $S_m$  la somme des  $2^{m-1}$  chiffres de la période de la colonne  $10^m$  et par  $S_{m+1}$  la somme des  $2^m$  chiffres de la période de la colonne  $10^{m+1}$ ,

---

(1) Cela pourra paraître en contradiction avec l'observation même du Tableau des puissances de 5; mais c'est un désaccord apparent, résultat d'une extension qu'on aurait hâtivement donnée aux termes employés dans le texte, tandis que la démonstration, *restreinte à ses énonciations formelles*, est parfaitement exacte et fondée.

on aura

$$S_{m+1} = \frac{1}{2}(2S_m + 10 \cdot 2^{m-1} + 2^{m-1}),$$

c'est-à-dire, après réductions,

$$S_{m+1} = 9 \cdot 2^{m-2} + S_m.$$

En partant donc de  $S_2 = 7$ , on trouvera

$$S_3 = 7 + 9 = 16,$$

$$S_4 = 16 + 18 = 34,$$

$$S_5 = 34 + 36 = 70,$$

$$S_6 = 70 + 72 = 142,$$

$$\dots\dots\dots,$$

suite de valeurs qui mettent en évidence la relation

$$S_{m+1} = 2(S_m + 1).$$

Mais, reprenant la première expression trouvée, on peut écrire plus généralement

$$S_m = 9 \cdot 2^{m-3} + 9 \cdot 2^{m-4} + 9 \cdot 2^{m-5} + \dots + 9 \cdot 2^i + S_{i+2}$$

$$= 9 \cdot 2^i (2^{m-i-3} + 2^{m-i-4} + \dots + 2 + 1) + S_{i+2}$$

$$= 9 \cdot 2^i (2^{m-i-2} - 1) + S_{i+2}$$

$$= 9 \cdot 2^{m-2} - 9 \cdot 2^i + S_{i+2}.$$

Faisant alors  $i = 0$ , on trouvera, à cause de  $S_2 = 7$ ,

$$S_m = 9 \cdot 2^{m-2} - 2.$$

6. Puisque la numération décimale emploie dix caractères, il est impossible que ceux-ci figurent tous en même nombre dans la période de  $2^{m-1}$  termes qui est relative à la colonne  $10^m$ , et il y a toujours un reste de 2, 4, 6 ou 8 unités. La plus grande égalité possible entre eux est qu'ils se présentent un nombre de fois marqué par

$$\frac{2^{m-1} - 2r}{10} = \frac{2^{m-2} - r}{5} \quad (r = 1, 2, 3, 4 \text{ ou } r = \pm 1, 2),$$

sauf à  $2r$  d'entre eux à se présenter une fois de plus (ou de moins). S'il en est ainsi, comme la somme des nombres d'un

seul chiffre en numération décimale est 45, la somme des chiffres de la période relative à la colonne  $10^m$  sera

$$9 \cdot 2^{m-2} - 9 \cdot r + \sigma,$$

en désignant par  $\sigma$  la somme des  $2r$  chiffres employés une fois de plus (ou de moins) que la moyenne ; or la somme des chiffres de la période, d'après ce qui a été vu un peu plus haut, est

$$9 \cdot 2^{m-2} - 2,$$

et par suite il me vient

$$\sigma = 9r - 2.$$

Si l'hypothèse est juste, il y a donc quatre cas à distinguer et seulement quatre cas, parce que la désinence du nombre  $\alpha$ , pair et non divisible par 10, se reproduit dans  $16\alpha$ . Par conséquent, pour  $r = 1$  j'ai  $\sigma = 7$ , ce qui montre que les chiffres répétés au delà de la moyenne sont 1 et 6 ; ce cas correspond à la supposition  $m \equiv 2 \pmod{4}$ . Pour  $r = 2$  j'aurai  $\sigma = 16$ , et les chiffres en surnombre peuvent être ou bien 1, 2, 6, 7 ou bien 0, 3, 5, 8 : la supposition  $m = 3$  montre que le dernier groupement est bien effectivement répétable lorsqu'on a  $m \equiv 3 \pmod{4}$ .

Avec les valeurs négatives de  $r$  et de  $\sigma$  et en faisant  $r = -1$ , on a en valeur absolue  $\sigma = 11$ , de sorte que les nombres dont la fréquence est d'une unité inférieure à la moyenne sont 3 et 8 ; ce cas correspond à la supposition  $m \equiv 0 \pmod{4}$  et s'offre effectivement pour  $m = 4$ . En faisant  $r = -2$ , on trouve  $\sigma = 20$  et les nombres de moindre fréquence peuvent être 1, 4, 6, 9 ou 2, 3, 7, 8 : l'exemple de  $m = 5$  montre que le premier groupement peut venir en déficit pour toute valeur  $m \equiv 1 \pmod{4}$ .

7. Les chiffres répétés en excédent de la fréquence moyenne étant

$$\text{pour } \left\{ \begin{array}{l} m \equiv 2 \\ m \equiv 3 \\ m \equiv 0 \\ m \equiv 1 \end{array} \right\} \pmod{4} \dots \left\{ \begin{array}{l} 1, 6 ; \\ 0, 3, 5, 8 ; \\ 0, 2, 3, 5, 7, 8 ; \\ 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 ; \end{array} \right.$$

on voit que, sur le total des vingt répétitions observées en plus de la fréquence moyenne dans les périodes appartenant à quatre colonnes consécutives quelconques, les divers chiffres se présentent également, c'est-à-dire *deux* fois, à l'exception de 0 et de 5 qui se représentent *trois* fois, et de 4 et 9 qui ne figurent qu'*une* seule fois. Donc, en pointant un chiffre au hasard dans le Tableau des puissances de 5, il y a avantage à parier que ce chiffre est un *zéro* ou un *cinq* et désavantage à parier que ce soit un *quatre* ou un *neuf*.

8. Les considérations développées dans les n<sup>os</sup> 6 et 7 établissent quelles sont les conséquences de l'hypothèse de l'égalité fréquence, aussi exactement réalisée que la nature des choses le comporte, dans les périodes relatives aux colonnes  $10^m$  pour les puissances successives du nombre 5; mais, bien que cette hypothèse et ses conséquences se vérifient sur les puissances de 5 autant qu'on peut en calculer **effectivement**, il serait utile de démontrer par le raisonnement qu'on **est en présence d'une** véritable loi numérique. Cela du reste est facile et **relève du procédé de démonstration** par reconduction, si fréquemment employé en **Mathématiques** et déjà invoqué dans ce court Mémoire.

Je considère un indice quelconque dans la progression  $m \equiv 2 \pmod{4}$  et j'admets que dans la période de la colonne déterminée par cet indice chaque chiffre y figure le même nombre  $\mu$  de fois, sauf 1 et 6, qui se présentent une fois de plus. Or il a été démontré que la période de la colonne suivante résultera de deux périodes consécutives de la période  $10^m$ , tout chiffre 0 ou 1 donnant lieu à un 0 ou à un 5, tout chiffre 2 ou 3 à un 1 ou à un 6, tout chiffre 4 ou 5 à un 2 ou à un 7, tout chiffre 6 ou 7 à un 3 ou à un 8, tout chiffre 8 ou 9 à un 4 ou à un 9, et celle de ces alternatives qui ne se produit pas dans la première période se trouvant forcément vérifiée dans la seconde. Il en résulte que pour l'indice  $m+1 [\equiv 3 \pmod{4}]$  les chiffres se reproduisent  $2\mu$  fois; sauf 0, 3, 5, 8, qui reparaitront une fois de plus. Pour la même raison, en passant à l'indice  $m+2 [\equiv 0 \pmod{4}]$ , on trouvera que les chiffres sont tous reproduits  $4\mu$  fois, sauf 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, qui le sont une fois de plus; et de même encore, en considérant l'indice  $m+3 [\equiv 1 \pmod{4}]$ , on conclura à la répétition  $(8\mu+1)$  fois de tous les chiffres

à l'exception de 0, 2, 3, 5, 7, 8, qui s'offriront une fois de plus. Enfin, pour l'indice  $m+4 [\equiv 2 \pmod{4}]$ , les deux chiffres du système décimal s'offrent chacun  $(16\mu+3)$  fois, avec une répétition supplémentaire de 1 et de 6; on est retombé sur l'hypothèse initiale, qui, si elle est vérifiée une seule fois, et c'est ce qui a lieu pour les faibles indices, l'est ainsi perpétuellement.

Il resterait à vérifier que ces circonstances sont exprimées par la formule de M. E. Cesaro :

$$N = \frac{1}{8}(2^{m-2} + \varphi_i),$$

où  $N$  est le nombre des répétitions du chiffre  $i$  dans la période relative à la colonne  $10^m$ ,  $\varphi_i$  étant donné par le Tableau

Valeurs de  $i$ .  $m=4h$ .  $m=4h+1$ .  $m=4h+2$ .  $m=4h+3$ .

|        |     |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|-----|
| 0 ou 5 | 1   | 2   | — 1 | 3   |
| 1 ou 6 | 1   | — 3 | 4   | — 2 |
| 2 ou 7 | 1   | 2   | — 1 | — 2 |
| 3 ou 8 | — 4 | 2   | 1   | 3   |
| 4 ou 9 | 1   | — 3 | — 1 | — 2 |

mais le soin peut sans doute en être laissé au lecteur.

## 2055.

(1906, p. 575.)

*La parabole inscrite dans le quadrilatère formé par les deux axes d'une conique, la tangente et la normale en un point M de cette conique, touche, comme l'on sait, la normale au centre de courbure en M. Trouver le lieu du foyer de cette parabole lorsque le point M se déplace sur la conique.*  
(A. PELLET.)

## SOLUTION

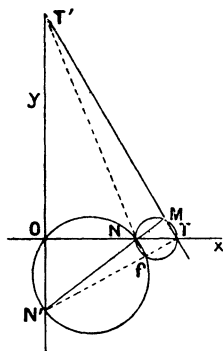
Par M. A. LAUREAUX.

Soient  $Ox Oy$  les axes,  $MNN'$  la normale et  $TMT'$  la tangente.

Le foyer de la parabole est sur les cercles circonscrits aux triangles  $ONN'$ ,  $NMT$ ,  $N'MT'$ ,  $TO'T'$ .

Soit  $f$  ce point.

Etant sur les quatre cercles, on en déduit de suite qu'il est sur  $N'T$  et que les points  $T'$ ,  $N$ ,  $f$  sont sur une même perpendiculaire à  $N'T$ .



Il en résulte (quadrilatère complet  $NOMT'N'T$ ) que

$$(T'NI f) = -1,$$

$I$  étant le point d'intersection de  $T'N$  et  $OM$ .

Donc  $ON$ ,  $OT'$  sont bissectrices de  $OM$ ,  $O f$ .

Donc  $O f$  coupe le cercle  $NMT$  au point  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à  $Ox$  et l'on a

$$O f . OM' = ON . OT = c^2,$$

car  $N$  et  $T$  sont conjugués par rapport aux foyers.

$M'$  décrivant la conique, le lieu de  $f$  est la figure inverse par rapport au centre avec la puissance  $c^2$ .

Autres solutions par MM. BARISIEN, LETIERCE, LEZ.