

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 413-419

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__413_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

On considère la surface S définie, en coordonnées rectangulaires, par les équations

$$x = e^{-u} \cos v, \quad y = e^{-u} \sin v, \quad z = \int_0^u du \sqrt{1 - e^{-2u}}.$$

1° Effectuer l'intégration qui donne la valeur de z ;

2° Montrer que S est de révolution autour de OZ et que la portion d'une tangente à une méridienne comprise entre OZ et le point de contact a une longueur constante. Forme de la méridienne : calcul de son rayon de courbure;

3° Déterminer les asymptotiques de S : projection, sur OXY des asymptotiques se croisant au point où u et v sont nuls.

SOLUTION.

$$z = L (e^u + \sqrt{e^{2u} - 1}) - \sqrt{1 - e^{-2u}}.$$

$$3^\circ \quad dz = -\sqrt{e^{2u} - 1} (\cos v dx + \sin v dy).$$

On en déduit p, q et l'on forme l'équation

$$dp\,dx + dq\,dy = 0;$$

le rayon vecteur r d'un point de la projection est e^{-u} et l'équation de cette projection sur OXY

$$dv = \pm \frac{dr}{r\sqrt{1-r^2}}.$$

(Juillet 1907.)

Lille.

I. ANALYSE. — 1° O*x*, O*y* et Oz étant trois axes rectangulaires, construire la lemniscate (C) représentée par les équations

$$(1) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad z = 0,$$

où a désigne une longueur donnée; montrer qu'il existe sur O*x* deux points F, F' tels que le produit des distances d'un point quelconque de la lemniscate à F et F' ait une valeur constante.

2° Écrire l'équation de la surface de révolution (S) engendrée par la rotation de (C) autour de O*x*, indiquer la forme de l'intersection de (S) et d'un plan parallèle à xOy .

3° Calculer le volume de la portion de l'espace intérieure à cette surface (S).

4° Former et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des lemniscates représentées par l'équation (1) quand a varie, construire l'une de ces trajectoires orthogonales.

5° Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par la sphère (Σ):

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

et par le cylindre qui a pour base la lemniscate (C) et dont les génératrices sont parallèles à Oz ainsi que l'aire de la partie de la surface de (Σ) comprise à l'intérieur du cylindre.

II. MÉCANIQUE. — 1° Théorème des moments des quan-

tités de mouvement pour un point matériel et pour un système. Équation du mouvement d'un solide mobile sans frottement autour d'un axe fixe.

2° On donne le poids P d'un solide S qui peut osciller librement autour d'un axe fixe horizontal OZ , la distance $OG = a$ du centre de gravité G de ce solide à l'axe OZ , la durée t des petites oscillations du pendule ainsi obtenu, le poids p et le rayon r d'une sphère homogène C ; et l'on demande de déterminer la durée x des petites oscillations du deuxième pendule obtenu en fixant invariablement la sphère C au solide S , de façon que son centre C soit sur le prolongement de OG à une distance $OC = b$ de l'axe OZ .

On prendra

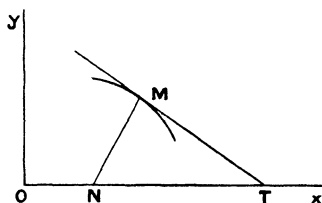
$$\begin{aligned} P &= 5^{\text{kg}}, & a &= 1^{\text{m}}, 5, & t &= 1^{\text{s}}, 4, \\ p &= 3^{\text{kg}}, & r &= 0^{\text{m}}, 07, & b &= 2^{\text{m}}, 4. \end{aligned}$$

(Juillet 1907.)

Lyon.

Poser l'équation différentielle des courbes C telles que

$$OT \cdot ON = c^2 = \text{const.}$$



On intégrera en posant $x^2 = u$, $y^2 = v$.

Par un point P du plan passent deux courbes C_1 et C_2 .

Si P a pour coordonnées $x = c$, $y = \frac{c}{\sqrt{2}}$, C_1 est une ellipse,

C_2 est une hyperbole. C_2 divise C_1 en trois parties, dont on demande de calculer les aires.

SOLUTION.

On a

$$OT = x - \frac{y}{y'}, \quad ON = x + yy',$$

$$(1) \quad x^2 - y^2 + xy \left(y' - \frac{1}{y'} \right) = c^2,$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad c^2 = u - v + \frac{u dv^2 - v du^2}{du dv}.$$

Traisons u et v comme des coordonnées avec $p = \frac{dv}{du}$.
On a l'équation de Clairaut

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = pu - c^2 \frac{p}{1+p} \\ \text{ou} \\ up^2 - p(v - u + c^2) - v = 0. \end{array} \right.$$

Les courbes intégrales de (3) sont les tangentes à la conique H

$$0 = (v - u + c^2)^2 + 4uv;$$

les courbes intégrales de (1) sont donc des coniques h , orthogonales, homofocales

$$c^2 \frac{p}{1+p} = px^2 - y^2 \quad (p = \text{paramètre arbitraire})$$

à foyers fixes $y = 0, x = \pm c$, etc. (Juillet 1907.)

Montpellier.

Une courbe est représentée par rapport à deux axes rectangulaires par les équations

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a \cos t. \end{aligned}$$

1° Calculer la longueur de l'arc de courbe compris entre les points correspondant à $t = -\pi$ et $t = +\pi$.

2° En un point quelconque M, déterminer le centre de courbure C et le rayon de courbure.

3° Trouver le lieu du centre de courbure, et montrer que ce lieu, et la première courbe, ont des formes identiques.

4° C étant le centre de courbure au point M de la première courbe, trouver le lieu du milieu de la droite MC.

5° Trouver l'enveloppe de la droite perpendiculaire à MC menée par son milieu.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère l'ellipsoïde de révolution engendré par la rotation de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

autour de Ox, puis un cône de révolution autour du même axe, circonscrit à l'ellipsoïde précédent. On prend pour base de ce cône le plan engendré par Oy en vertu de la même rotation.

Minimum du volume de ce cône ?

On étudiera plus généralement la variation de ce volume en faisant usage d'une représentation graphique.

N. B. — On prendra pour variable x , la distance du sommet du cône au point O. (Juillet 1907.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. On donne l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{a} \frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) y = 0,$$

où a et b désignent deux constantes positives.

1° Trouver une solution $y = f(x)$ de cette équation, telle que pour $x = 0$ on ait

$$y = h \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

2° Construire la courbe qui représente la variation de la fonction $y = f(x)$ ainsi déterminée, en supposant que x croisse de 0 à $+\infty$. Calculer les coordonnées des points où

la tangente est parallèle à Ox et les valeurs du rayon de courbure en ces mêmes points.

II. Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{a} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{a^2} y = e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}},$$

a et c désignant deux constantes positives.

Examiner les cas particuliers où $c = \pm a$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère l'enveloppe de la droite définie par l'équation

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = 2 a \sin \alpha + 2 \cos \alpha,$$

α désignant un paramètre variable.

Trouver : 1° les coordonnées d'un point de l'enveloppe en fonction du paramètre α ;

2° La longueur d'arc comptée à partir du point correspondant à $\alpha = 0$;

3° L'expression du rayon de courbure.

(Novembre 1906.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° Trouver l'intégrale générale du système d'équations différentielles

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = +\sqrt{a^2 - y^2}, \\ \frac{dx}{dt} = \frac{a^2 - y^2}{y}. \end{cases}$$

Montrer que, si l'on détermine les constantes d'équation de manière à satisfaire aux conditions initiales suivantes :

$$\text{pour } t = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 0, \quad y = a,$$

on a

$$(2) \quad y = a \sin t, \quad x = a \log \tan \frac{t}{2} + a \cos t.$$

Étudier la courbe définie par les équations (2).

(419)

Calculer en fonction de t : 1° l'angle de la tangente avec Oy ; 2° la longueur de l'arc compté à partir du point A qui correspond à la valeur $t = \frac{\pi}{2}$; 3° le rayon de courbure; 4° les coordonnées du centre de courbure; 5° l'aire comprise entre la courbe, l'axe des y , l'axe des x et une ordonnée variable : cette aire tend vers une valeur déterminée quand l'ordonnée limite s'éloigne indéfiniment. Reconnaître la nature de la développée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Intégrer l'équation différentielle linéaire

$$y' - \frac{1+3x^2}{x(1+x^2)}y = \frac{x(1-x^2)}{1+x^2},$$

et déterminer la constante de façon que l'on ait $y=0$ pour $x=1$.

2° Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

(Juin 1907.)