

LUCIEN GODEAUX

Sur une extension à l'espace d'un théorème de Grassmann

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 395-399

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__395_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[Q2]

**SUR UNE EXTENSION A L'ESPACE D'UN THÉORÈME
DE GRASSMANN ;**

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Grassmann a établi le théorème suivant :

Les droites qui rencontrent les côtés correspondants de deux triangles donnés dans un même plan

en des couples d'une involution enveloppent une courbe de troisième classe ⁽¹⁾.

Nous nous proposons d'étendre ce théorème à l'espace à $r - 1$ dimensions. A vrai dire, pour $r = 4$, cette généralisation a été commencée par M. Neuberg ⁽²⁾ et par nous ⁽³⁾, mais dans l'article de M. Neuberg et l'un des nôtres, la forme qui lie les éléments envisagés est une involution, alors qu'ici nous nous proposons de considérer une forme quelconque.

Soit, dans un espace linéaire à $r - 1$ dimensions, un groupe de k espaces linéaires à $r - n$ dimensions.

Chacun de ces k espaces est l'intersection de $n - 1$ espaces linéaires à $r - 2$ dimensions qui ont pour équations

$$a_{ij}x = 0, \quad (i = 1, \dots, n - 1; j = 1, \dots, k),$$

a_x désignant une forme linéaire homogène à deux variables.

Dans la suite, nous désignerons ce groupe par la lettre A.

n points donnés dans un espace linéaire à $r - 1$ dimensions déterminent un espace linéaire ξ à $n - 1$ dimensions.

Soient x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ces n points, leurs coordonnées étant respectivement

$$(xi_1, xi_2, \dots, xi_r).$$

⁽¹⁾ NEUBERG, *Sur les quadrangles et les quadrilatères paralogiques* (*Mathesis*, 3^e série, t. II, 1902).

⁽²⁾ NEUBERG, *Sur le complexe de Grassmann* (*Mathesis*, 3^e série, t. II, 1902).

⁽³⁾ L. GODEAUX, *Sur un complexe du sixième ordre et de la sixième classe* (*Bul. de l'Académie royale de Belgique*, janvier 1907). — L. GODEAUX, *Sur un mode de génération des surfaces* (Adressé à la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques* en août 1906).

Un point quelconque de l'espace ξ a pour coordonnées

$$\begin{aligned} \mu_1 x_{11} + \mu_2 x_{21} + \dots + \mu_n x_{n1}, \\ \mu_2 x_{12} + \dots, \\ \dots, \\ \mu_1 x_{1r} + \dots + \mu_n x_{nr}. \end{aligned}$$

Pour que ce point soit situé sur le $j^{\text{ième}}$ espace à $r-n$ dimensions du groupe A, les valeurs μ doivent satisfaire aux équations

$$\begin{aligned} \mu_1 a_{1jx1} + \mu_2 a_{2jx2} + \dots + \mu_n a_{njxn} &= 0, \\ \dots, \\ \mu_1 a_{(n-1)jx1} + \dots + \mu_n a_{(n-1)jxn} &= 0. \end{aligned}$$

Les μ sont donc fournis par la matrice

$$(1) \quad \left\| \begin{array}{ccc} a_{1jx1} & \dots & a_{njxn} \\ a_{2jx1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)jx1} & \dots & a_{(n-1)jxn} \end{array} \right\| = 0.$$

Nous désignerons ces valeurs μ par $\mu_{j1}, \mu_{j2}, \dots$

Lorsque j est successivement égal à 1, 2, ..., k , nous obtenons k groupes de valeurs μ .

Supposons ces k groupes liés par une relation de la forme

$$(2) \quad \alpha_{1\mu_1} \alpha_{2\mu_2} \dots \alpha_{k\mu_k} = 0,$$

α_{μ} désignant une forme linéaire homogène à n variables.

Remarquons que les valeurs déduites de la matrice (1) sont linéaires en x_1 , sauf l'une d'elles qui ne contient pas ces variables.

Si nous remplaçons dans (2) les μ par leurs valeurs respectives, il nous viendra un polynôme à n^k termes.

On peut trouver aisément le nombre de termes qui sont du degré i en x_1 .

Prenons, dans $k - i$ systèmes de valeurs de μ , les $k - i$ valeurs qui sont de degré zéro en x_1 . Il est visible que le nombre de termes de degré i en x_1 et dans lesquels entrera le produit des $k - i$ valeurs choisies est $(n - 1)^i$. Comme on peut prendre dans les k groupes de μ , c_k^{k-i} produits différents et de degré zéro en x_1 , le nombre total des termes de degré i en x_1 est

$$c_k^{k-i} (n - 1)^i$$

ou

$$c_k^i (n - 1)^i.$$

Remarquons que ce nombre est le $i^{\text{ième}}$ terme du développement de

$$[1 + (n - 1)]^k.$$

Si, en outre du groupe A, nous considérons $n^k - 1$ groupes analogues B, C, ..., H, mais dont les paramètres μ déterminés comme précédemment satisfont toujours à la relation (2), nous obtenons n^k équations entre lesquelles nous pouvons facilement éliminer les coefficients α . Il nous reste alors une équation écrite sous forme d'un déterminant à n^k lignes et homogènes en $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Le degré du déterminant en x_1 est

$$v = 0 c_k^0 + 1 c_k^1 (n - 1) + 2 c_k^2 (n - 1)^2 + \dots + k c_k^k (n - 1)^k.$$

Supposons les coordonnées des points $X_2, X_3, \dots, X_n$ constantes et prenons celles de X_1 comme coordonnées courantes. L'équation représente maintenant un cône de l'ordre v et ayant pour sommet l'espace à $n - 2$ dimensions déterminé par les points $X_2, \dots, X_n$.

Nous disons un cône, car on voit aisément que, dans

chacun des termes du développement du déterminant, il entre des facteurs de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{1jx1} & \dots & a_{1jxn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)jx1} & \dots & a_{(n-1)jxn} \end{vmatrix},$$

provenant de la matrice (1) et qui s'annulent pour

$$x_2 = x_1,$$

par exemple.

On peut donc dire que les espaces tels que ξ qui passent par un espace linéaire à $n - 2$ dimensions sont tangents à un cône d'ordre ν , par conséquent on peut dire que le lieu des espaces ξ est une variété algébrique de classe ν .

Pour $n = r - 1$, le cône se décompose en ν espaces linéaires à $r - 2$ dimensions passant par un espace linéaire à $n - 3$ dimensions.