

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 381-384

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__381_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2054.

(1903, p. 28)

Les axes des coniques ayant un contact du troisième ordre avec une courbe en un point M donné sont tangentes à une parabole. (A. PELLET.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Prenons pour axe des x et des y la tangente et la normale à la courbe en M et soit

$$au^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu = 0$$

l'équation tangentielle d'une conique ayant, avec la courbe donnée, un contact du troisième ordre au point M.

L'équation générale des coniques de l'énoncé sera

$$f(u, v, w) = au^2 + \lambda w^2 + 2bvw + 2b'wu = 0$$

(λ paramètre variable).

Les axes sont définis par

$$\frac{f'_u}{u} = \frac{f'_v}{v},$$

$$f'_w = 0.$$

La première de ces équations, qui s'écrit

$$auv + b'vw - b'wu = 0,$$

ne dépend pas du paramètre λ ; c'est donc l'équation de l'enveloppe des axes. Elle représente une parabole tangente à Ox et à Oy au point d'ordonnée $-\frac{a}{b}$ qui est le centre de courbure de la courbe en M .

Autre solution de M. LAUREAUX.

NOTE

Par M. KLUG.

Si des coniques k_i sont inscrites dans un quadrilatère et si c est une conique quelconque du même plan, les côtés des triangles polaires communs à c et à chaque conique du système k_i sont tangentes à une courbe de troisième classe (P.-E. SCHUBERT : *Theorie d. Kegelschnitte*, III. Aufl., p. 417).

Mais, si la conique c est la conique absolue (l'intersection d'un cercle avec la droite à l'infini), les côtés de ces triangles sont les axes des coniques k_i et la droite à l'infini. On peut donc dire : *les axes de toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère sont tangentes à une courbe de troisième classe.*

Si les coniques k_i sont inscrites dans un quadrilatère qui est circonscrit à un cercle ou si les coniques k_i ont un double contact : les axes des coniques k_i sont les tangentes à une parabole et les droites qui passent dans le premier cas par le centre du cercle, dans le second cas par le point à l'infini de la droite qui est rectangulaire sur la corde de contact.

Si enfin les coniques k_i ont un contact du troisième ordre au point M , les axes des coniques restent les tangentes d'une parabole et, si l'une quelconque de ces coniques a un contact du troisième ordre avec une courbe donnée au point M , toutes les autres ont aussi ce même contact avec cette courbe.

2058.

(1906, p. 576.)

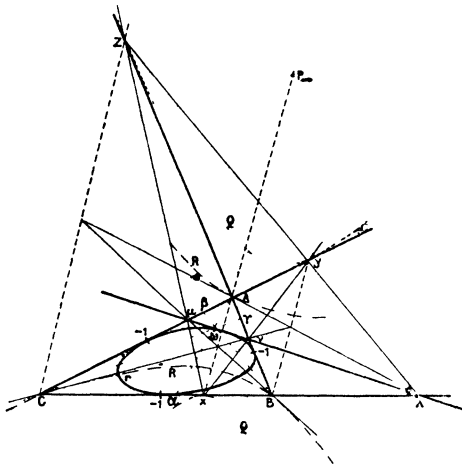
Dans le triangle ABC on mène les parallèles Ax , By , Cz à une direction donnée. Démontrer que l'axe d'homologie $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$ des triangles ABC et xyz touche l'ellipse tangente aux milieux des côtés de ABC en un point ω qui

est le centre commun à la conique Q inscrite à ABC en x , y , z et à la conique R inscrite en A, B, C au triangle des droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$. (P. SONDAT).

SOLUTION

Par M. P. SONDAT.

Soit $P(x, y, z)$ un point à l'infini dans le plan du triangle



de référence ABC (voir la figure). On a

$$(1) \quad \frac{1}{x} + y = 1,$$

d'où

$$(2) \quad y = \frac{x-1}{x}, \quad z = \frac{1}{1-x}.$$

Si $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$ est la polaire de P,

$$(3) \quad \lambda = -x, \quad \mu = -y, \quad \nu = -$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$(4) \quad \frac{-1}{\lambda} + \frac{\mu}{-1} = 1,$$

où Δ enveloppe l'ellipse r tangente aux milieux $-1, -1, -1$, des côtés de ABC .

Si $\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ est le point de contact,

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha = -\lambda^2, & \beta = -\mu^2, & \gamma = -\nu^2, \\ \alpha = -x^2, & \beta = -y^2, & \gamma = -z^2. \end{cases}$$

Le centre $\theta(x, y, z)$ de la conique Q inscrite à ABC en x, y, z est donné par les formules

$$X = \frac{1-z}{z(1-y)}, \quad Y = \frac{1-x}{x(1-z)}, \quad Z = \frac{1-y}{y(1-x)},$$

ou (2)

$$X = -x^2, \quad Y = -y^2, \quad Z = -z^2.$$

Donc θ est en ω .

Le centre $\theta_1(X_1, Y_1, Z_1)$ de la conique R inscrite en A, B, C au triangle des droites $A\lambda, B\mu, C\nu$ est donné par

$$\begin{aligned} -X_1 &= \frac{\lambda(1-\lambda+\lambda\mu)}{-1+\lambda+\lambda\mu}, \\ -Y_1 &= \frac{\mu(1+\lambda-\lambda\mu)}{1-\lambda+\lambda\mu}, \\ -Z_1 &= \frac{\nu(-1+\lambda+\lambda\mu)}{1+\lambda-\lambda\mu}, \end{aligned}$$

ou (3) et (2)

$$X_1 = -x^2, \quad Y_1 = -y^2, \quad Z_1 = -z^2.$$

Donc θ_1 est aussi en ω .

Remarque. — L'équation (4) exprime aussi que R passe par le centre de gravité G de ABC , ce qui devait être, puisque le centre θ de R appartient à r , qui est le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrangle $GABC$.

Autre solution par M. LAUREAUX.