

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 373-381

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__373_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — On donne une courbe gauche C et une sphère Σ ayant pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les tangentes à la courbe C soient tangentes à la sphère Σ est que les coordonnées x, y, z d'un point M mobile sur la courbe C satisfassent à la relation différentielle

$$(x^2 + y^2 + z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (x dx + y dy + z dz)^2 = 0.$$

Calculer la longueur d'un arc de la courbe C en fonction des coordonnées des extrémités de l'arc. (On exclut le cas où la courbe C est tracée sur la sphère Σ .)

Montrer géométriquement que le plan osculateur en un point quelconque de la courbe C est tangent à la sphère Σ .

On déterminera ensuite la courbe C par la condition qu'elle soit située sur le cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon donné b . On formera, dans ce cas, l'équation du plan osculateur et l'on calculera le rayon de courbure et le rayon de torsion en un point quelconque de C .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étant données les deux équations

différentielles linéaires

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 2x - \frac{1}{x} \right] \frac{dy}{dx} + \left[\frac{1}{4(1+x)} - \frac{4x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{4x(1+x)\sqrt{1+x}} \right] y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} \right] \frac{dy}{dx} + \left[\frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4x(1+x)\sqrt{1+x}} - \frac{1}{4\sqrt{x(1+x)}} \right] y = 0,$$

montrer qu'elles admettent une solution commune, puis intégrer complètement chacune des deux équations.

(Juillet 1907.)

Caen.

I. Former, en coordonnées rectangulaires, l'équation d'une surface S contenant la parabole

$$x = R, \quad y^2 = 2ax$$

et telle que le plan tangent en un point M de S rencontre, à une distance R de l'origine, la droite allant de cette origine à la projection du point M sur le plan OXY .

SOLUTION.

On trouve une équation linéaire et l'on a l'intégrale

$$z = R \frac{x^2 + y^2 - Rx \pm (R - x) \sqrt{x^2 + y^2}}{2ax} \dots$$

II. Trouver les trajectoires orthogonales d'une famille de cercles qui ont leur centre en un point de la droite

$$z = 0, \quad x = a,$$

et qui sont tangents à OZ au point O . Reconnaître que ce sont des cercles situés dans des plans parallèles à OY , les axes étant rectangulaires.

(375)

SOLUTION.

Les coordonnées d'un point des cercles donnés sont

$$x = a(1 + \cos u), \quad y = a(1 + \cos u) \tan v, \quad z = a \frac{\sin u}{\cos v};$$

les trajectoires sont déterminées par l'équation

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{\sin v \, dv}{\cos v},$$

$$Cx + z - 2Ca = 0; \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2Ca z = 0.$$

(Juillet 1907.)

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — On considère la surface S définie par les équations

$$x = -u^3 + 3uv^2 + 3u,$$

$$y = -3u^2v + v^3 - 3v,$$

$$z = 3u^2 - 3v^2,$$

dans lesquelles u, v sont des variables indépendantes, et l'on demande de déterminer :

- 1° Le plan tangent en un point de S ;
- 2° L'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à S , le long d'une des courbes coordonnées $u = \text{const.}$, ou $v = \text{const.}$;
- 3° Les lignes asymptotiques de S ;
- 4° Les lignes de courbure de S ;
- 5° Les rayons principaux en un point de S .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégration de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (x+1) \frac{dy}{dx} + 3(x-2)y = \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-1)^4} e^x.$$

(Juillet 1907.)

Lille.

QUESTION DE COURS. — 1° On suppose que les coordonnées x, y d'un point quelconque d'une courbe plane sont

des fonctions elliptiques d'un paramètre t . Démontrer que cette courbe est algébrique et calculer le nombre de ses points doubles.

2° *Démontrer que les coordonnées d'un point quelconque sur une cubique sans point double peuvent être exprimées par des fonctions elliptiques d'un paramètre.*

3° *Même question pour une courbe algébrique quelconque de genre un.*

PROBLÈME. — 1° *On donne l'équation aux dérivées partielles de premier ordre :*

$$(z - px - qy)^2 + \frac{q}{yz} = 0.$$

Démontrer qu'il existe, comme surfaces intégrales, certaines quadriques admettant pour axes les axes de coordonnées.

2° *En déduire l'intégrale générale.*

3° *Déterminer celle des surfaces intégrales qui passe par la courbe*

$$x^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

(Juillet 1907.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Démontrer que le rapport anharmonique de quatre intégrales particulières d'une équation dite de Riccati de la forme*

$$\frac{dy}{dx} + a + by + cy^2 = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions de la variable x , ne dépend pas de x .

2° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$px^n + qy^n = z^n,$$

où n est un nombre entier positif ou négatif.

Déterminer la surface qui satisfait à cette équation et qui contient la droite dont les équations en coordonnées

rectangulaires sont

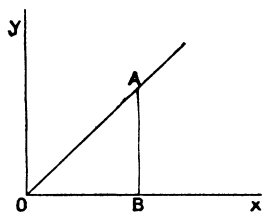
$$z = 1, \quad x = y\sqrt{2}.$$

Examiner les cas particuliers où l'on a : $n = \pm 1$, $n = 0$ et, dans le cas de $n = -1$, indiquer les lignes de courbure de la surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — La variable complexe

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

étant représentée par un point dans un plan, on trace les



parties positives des axes Ox et Oy et la bissectrice de leur angle. On prend sur cette bissectrice un point A que l'on projette en B sur Ox et l'on demande :

1° D'évaluer l'intégrale $\int e^{-z^2} dz$, prise dans un sens quelconque le long du contour formé par les trois côtés du triangle OAB ;

2° De démontrer que l'expression

$$x \int_0^x e^{y^2} dy - e^{x^2} + 1$$

est négative pour toute valeur positive de x et qu'il en résulte que le module de l'intégrale $\int e^{-z^2} dz$, prise sur le seul côté AB , tend vers zéro quand le point A s'éloigne indéfiniment sur OA ;

3° De trouver, dans les mêmes conditions, la limite de l'intégrale $\int_{OA} e^{-z^2} dz$, calculée sur OA .

NOTA. — On rappelle la formule réelle

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

(Juillet 1907.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une surface étant rapportée à des axes rectangulaires, la normale au point M coupe le plan XOY en A; ce point M se projette en P sur le même plan XOY :

1° Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que la bissectrice de l'angle AOP se confonde avec la bissectrice des axes XOY;

2° Intégrer cette équation, et former l'équation générale de ces surfaces;

3° Déterminer la surface particulière S qui passe par la circonférence intersection du plan $x = y$ et de la sphère

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 + z^2 = 4a^2;$$

4° Déterminer les lignes de courbure des deux systèmes de la surface S;

5° Montrer que les lignes de courbure de chaque système passent par deux points fixes et sont des circonférences.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Calculer la surface du paraboloïde

$$xy = az$$

qui est intérieure au cylindre fermé

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy;$$

2° Calculer le volume compris à l'intérieur du cylindre, limité par le paraboloïde et par le plan xOy .

Les axes sont supposés rectangulaires et $a > 0$.

(Juillet 1907.)

Rennes.EPREUVE THÉORIQUE. — I. ANALYSE. — *Les formules*

$$(I) \quad \begin{cases} x_1 = x(1 + zt), \\ y_1 = y(1 + zt), \\ z_1 = \frac{z}{1 - zt}, \end{cases}$$

où t désigne un paramètre, définissent une correspondance entre le point $M(x, y, z)$ et le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

1° Montrer que $\frac{\partial x_1}{\partial t}$, $\frac{\partial y_1}{\partial t}$, $\frac{\partial z_1}{\partial t}$ peuvent s'exprimer en fonction de x_1, y_1, z_1 .

2° Si l'on donne à t une valeur constante, x_1, y_1, z_1 deviennent les fonctions de x, y, z , et l'expression

$$x_1 z_1 dx_1 + y_1 z_1 dy_1 - z_1^2 dz_1 - (xz dx + yz dy - z^2 dz)$$

peut être mise sous la forme

$$P dx + Q dy + R dz,$$

P, Q, R étant des fonctions de x, y, z . Calculer l'intégrale de différentielle totale

$$\int P dx + Q dy + R dz$$

et montrer qu'elle se réduit à une fonction rationnelle de x, y, z .

3° Le paramètre t ayant une valeur déterminée quand le point $M(x, y, z)$ décrit une courbe fermée (C) , le point correspondant M_1 décrit une courbe fermée (C_1) . Vérifier que l'on a

$$\int_{(C_1)} x_1 z_1 dx_1 + y_1 z_1 dy_1 - z_1^2 dz_1 = \int_{(C)} xz dx + yz dy - z^2 dz.$$

4° Transformer par la formule de Stokes l'intégrale curviligne

$$\int_{(C)} xz dx + yz dy - z^2 dz$$

et montrer que cette intégrale est nulle quand la courbe fermée (C) est sur une surface de révolution autour de OZ.

II. GÉOMÉTRIE. — On donne une famille de courbes (C) dépendant d'un paramètre v . Ces courbes sont tracées sur un cylindre de révolution de rayon r , d'axe Oz, et passent par le point A de rencontre de Ox et du cylindre. Soient

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u, \quad z = r \varphi(u, v)$$

les équations déterminant cette famille.

On porte sur la tangente, en un point quelconque M' d'une courbe (C) déterminée, un segment M'M tel que

$$\text{arc AM}' + \text{M'M} = l,$$

l étant une constante donnée. Lorsque le point M' décrit la courbe (C) choisie, le point M décrit une développante (D) de cette courbe et, lorsque (C) varie, cette développante (D) engendre une surface (Σ).

1° Lorsque les courbes (C) sont des hélices, trouver en fonction des deux paramètres u et v les coordonnées d'un point quelconque de la surface (Σ). Montrer que la surface (Σ) reste normale à M'M, trouver ses lignes de courbures, étudier leurs particularités et en déduire des générations simples de cette surface.

2° Les courbes (C) étant quelconques, démontrer géométriquement, en utilisant les propriétés des développées, que, pour que les développantes (D) soient lignes de courbure de la surface (Σ), il faut et il suffit que la normale en M à la surface fasse un angle constant avec la direction MM'.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étant donnée l'équation aux différentielles totales

$$(yz + a^2) \frac{dx}{x} + (xz + a^2) \frac{dy}{y} - (x + y) dz = 0,$$

où a désigne une constante :

1° Vérifier que la condition d'intégrabilité est satisfaite;

2° Intégrer l'équation donnée;

3° Déterminer une fonction $\lambda(x, y, z)$ telle que, en multipliant par λ le premier membre de l'équation donnée, on obtienne comme produit une différentielle exacte.

(Juin 1907.)