

R. ALEZAIS

Sur le calcul d'une fonction analytique dont on connaît la partie réelle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 337-341

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__337_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D3a]

**SUR LE CALCUL D'UNE FONCTION ANALYTIQUE DONT
ON CONNAIT LA PARTIE RÉELLE ;**

PAR M. R. ALEZAIS.

Soit P une fonction réelle de x et de y ; on se propose d'en trouver une autre Q telle que $P + iQ$ soit fonction de $z = x + iy$, ou, ce qui revient au même, de trouver la fonction $f(z)$ dont P est la partie réelle. Les méthodes généralement employées nécessitent une intégration que l'on peut facilement éviter en s'appuyant sur la forme générale des intégrales de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

dont P et Q doivent être solutions.

Je désigne par t la conjuguée de z , de sorte que

$$x = \frac{z + t}{2}, \quad y = \frac{z - t}{2i}.$$

THÉORÈME. — *Si l'on a*

$$P(x, y) = \psi(z, t)$$

et si t_0 est une constante telle que $\psi(z, t_0)$ ne soit pas infinie, on a

$$(1) \quad f(z) = 2\psi(z, t_0) + c,$$

où c est une constante arbitraire.

En effet, la fonction P étant harmonique peut se

mettre sous la forme

$$P = \varphi(z) + \varphi_1(t),$$

et, comme de plus elle est réelle, φ_1 ne peut différer de la conjuguée de φ que par une constante réelle. On peut donc écrire

$$P = \varphi(z) + \varphi_1(t) + \text{const.}$$

en supposant φ_1 la conjuguée de φ . Q étant aussi une fonction harmonique réelle, on a de même

$$Q = \psi(z) + \psi_1(t) + \text{const.},$$

où ψ_1 est la conjuguée de ψ . Il en résulte

$$f(z) = \varphi(z) + \varphi_1(t) + i[\psi(z) + \psi_1(t)] + \text{const.}$$

Mais le second membre doit être fonction de z seul; il faut donc que l'on ait

$$\varphi_1(t) + i\psi_1(t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\psi_1(t) = -\frac{1}{i}\varphi_1(t), \quad \psi(z) = \frac{1}{i}\varphi(z).$$

On a donc

$$f(z) = 2\varphi(z) + \text{const.}$$

Enfin, de l'identité

$$\psi(z, t) = \varphi(z) + \varphi_1(t) + \text{const.},$$

il résulte que $\psi(z, t_0)$, supposé fini, ne diffère de $\varphi(z)$ que par une constante, et l'on a bien la formule (1).

Il est à remarquer que, P étant entièrement déterminée, la partie imaginaire de c est seule arbitraire; on détermine sa partie réelle en donnant à x et à y un système particulier de valeurs dans P et dans $2\psi(z_0, t_0) + c$. Cela fait, je désignerai par iA , A réel, la constante arbitraire.

Voici quelques exemples donnés aux examens de la licence :

$$1^{\circ} \quad P = \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x} \quad (\text{Grenoble, nov. 1884}).$$

$$\psi(z, t) = \frac{\sin(z+t)}{\cos(z-t) - \cos(z+t)}, \quad \psi\left(z, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos z}{2 \sin z}.$$

P s'annule avec z ; on a

$$f(z) = \cot z + iA.$$

$$2^{\circ} \quad P = \frac{x(1-x^2-y^2)}{1-2(x^2-y^2)+(x^2+y^2)^2} \quad (\text{Rennes, nov. 1888}).$$

$$\psi(z, t) = \frac{\frac{z+t}{2} \left[1 - \frac{(z+t)^2}{4} + \frac{(z-t)^2}{4} \right]}{1-2 \left[\frac{(z-t)^2}{4} + \frac{(z-t)^2}{4} \right] + \left[\frac{(z+t)^2}{4} - \frac{(z-t)^2}{4} \right]^2},$$

$$\psi(z, 0) = \frac{z}{2(1-z^2)}.$$

P s'annule avec z ; on a

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2} + iA.$$

$$3^{\circ} \quad P = \frac{\cos 2x + e^{2y}}{2 \cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}} \quad (\text{Montpellier, juillet 1893}).$$

$$\psi(z, t) = \frac{\cos(z+t) + \cos(z-t) - i \sin(z-t)}{2[\cos(z+t) + \cos(z-t)]},$$

$$\psi(z, 0) = \frac{2 \cos z - i \sin z}{4 \cos z} = \frac{1}{2} - \frac{i}{4} \tan z.$$

P se réduit à $\frac{1}{2}$ pour $z = 0$; on a

$$f(z) = \frac{1}{2} [1 - i(\tan z + A)].$$

$$4^{\circ} \quad P = 1 - \operatorname{ch} 2y \cos 2x \quad (\text{Nancy, juillet 1893}).$$

$$\psi(z, t) = 1 - \cos(z-t) \cos(z+t), \quad \psi(z, 0) = \sin^2 z.$$

P s'annule avec z ; on a

$$f(z) = 2 \sin^2 z + iA.$$

Généralisations. — Soit à déterminer

$$f(z) = P + iQ,$$

sachant que l'on a

$$aP + bQ = \Phi(x, y),$$

a et b étant des constantes réelles.

En raisonnant comme plus haut, on a

$$aP + bQ = (a - bi)\varphi(z) + (a + bi)\varphi_1(t) + \text{const.}$$

Soit

$$\Phi(x, y) = \psi(z, t),$$

il vient

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z, t_0)}{a - bi} + \text{const.}$$

et, par suite,

$$f(z) = \frac{2\psi(z, t_0)}{a - bi} + \text{const.}$$

Exemple :

$$P - Q = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2 \cos x - e^y - e^{-y}} \quad (\text{Montpellier, nov. 1906}).$$

$$\psi(z, t) = \frac{\cos \frac{z+t}{2} + \sin \frac{z+t}{2} - \cos \frac{z-t}{2} - i \sin \frac{z-t}{2}}{2 \left(\cos \frac{z+t}{2} - \cos \frac{z-t}{2} \right)},$$

$$\psi(z, \pi) = \frac{-2 \sin \frac{z}{2} + (1+i) \cos \frac{z}{2}}{-4 \sin \frac{z}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1+i}{4} \cot \frac{z}{2};$$

on a ici $a - bi = 1 + i$ et, par suite,

$$f(z) = c - \frac{1}{2} \cot \frac{z}{2}.$$

Mais, pour $z = 0$, $P - Q$ se réduit à $\frac{1}{2}$; on a donc en définitive

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \cot \frac{z}{2} \right) + (1+i)A.$$

D'une manière plus générale, étant donnée une relation

$$F(P, Q, x, y) = 0,$$

on peut l'écrire

$$F \left[\varphi(z) + \varphi_1(t) + \text{const.}, \right. \\ \left. \frac{\varphi(z)}{i} - \frac{\varphi_1(t)}{i} + \text{const.}, \frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2i} \right] = 0.$$

Si l'on peut trouver une valeur constante t_0 de t telle que cette relation prenne la forme

$$a \varphi(z) + b \varphi_1(t_0) = \Phi(z),$$

on en déduira $\varphi(z)$ à une constante près et, par suite, $f(z)$.

Exemple :

$$3xQ - yP = 8x^3y \quad (\text{Nancy, novembre 1904}).$$

Cette relation peut s'écrire

$$3(z+t)[\varphi(z) - \varphi_1(t)] \\ - (z-t)[\varphi(z) + \varphi_1(t)] = (z+t)^3(z-t).$$

Pour $t = 0$, on a

$$3z[\varphi(z) - \varphi_1(0)] - z[\varphi(z) + \varphi_1(0)] = z^4,$$

ou

$$2\varphi(z) = z^3 + 4\varphi_1(0), \\ f(z) = z^3.$$

On voit facilement en substituant que la constante est nulle.
