NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1906)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 326-332

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__326_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1906).

Sujets des compositions.

Mathématiques élémentaires.

I. Étant donné un triangle ABC, trouver sur la droite BC un point D tel qu'un cercle (β), inscrit ou exinscrit au triangle ABD et ayant son centre sur la bissectrice intérieure de l'angle B du triangle donné, soit tangent à un cercle (γ), inscrit ou exinscrit au triangle ACD et ayant son centre sur la bissectrice intérieure de l'angle C du triangle donné. Même question en considérant les angles extérieurs en B et C, ou encore un angle intérieur et un angle extérieur.

II. On donne deux cercles (β) et (γ) tangents *extérieurement* et soient SX, SX′ les tangentes communes extérieures à ces cercles. Un point A décrit la tangente commune intérieure ZZ′ et l'on mène de ce point les secondes tangentes aux cercles (β), (γ), lesquelles rencontrent SX en B et C, SX′ en B′, C′.

1° Les centres des deux cercles étant β et γ, le point d'intersection M des droites Bβ et Cγ et le point d'intersection M′ des droites B′β et C′γ décrivent deux droites Δ, Δ'.

2° Le quadrilatère MβM′γ est inscriptible à un cercle et les deux droites MM′ et $\beta\gamma$ sont conjuguées par rapport à ce cercle.

3° L'enveloppe de MM′ est une hyperbole; trouver le point de contact de MM′ avec son enveloppe.

4° Le cercle A$\beta\gamma$ est orthogonal au cercle MβM′γ. Ce même cercle A$\beta\gamma$, le cercle de centre M tangent aux trois côtés du triangle ABC et le cercle de centre M′ tangent aux trois côtés du triangle AB′C′ ont, deux à deux, même axe radical.

5° Désignons par O le milieu de $\beta\gamma$, par D et D′ les points où ZZ′ rencontre SX et SX′ et par ω le centre du cercle A$\beta\gamma$. On a

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{D'O}}{\mathrm{OM'}} = \frac{\mathrm{AD'}}{\mathrm{AD}},$$

$$\frac{1}{\omega\mathrm{O}} = \frac{1}{\mathrm{AD}} + \frac{1}{\mathrm{AD'}}.$$

Mathématiques spéciales.

On considère trois axes Ox, Oy, Oz formant un trièdre trirectangle et les paraboloïdes ayant pour équation, par rapport à ces axes :

$$x^2 + (y - az)^2 + 2\lambda z - \mathrm{R}^2 = 0,$$

a et R étant des constantes et λ un paramètre variable.

I. Par chacun des points P, P′ où l'un de ces paraboloïdes rencontre Oz, on mène la sphère qui contient les sections circulaires réelles passant par ce point; trouver le lieu de l'intersection des deux sphères relatives à P et P′; montrer que le plan radical de ces deux sphères est parallèle à un plan fixe et passe par le milieu de PP′. Par chacun des points M communs à ces deux sphères passe une troisième sphère qui correspond à un autre paraboloïde; quel est le lieu de M si cette sphère est fixe?

II. Le lieu des sections circulaires rencontrant Oz se compose, en général, d'un cône du second degré et d'une surface du troisième degré; montrer que cette dernière peut être engendrée par un cercle assujetti à rencontrer l'axe Oz et deux autres droites réelles fixes D, D' auxquelles il est constamment orthogonal.

III. Trouver les plans qui coupent la surface précédente suivant des cubiques circulaires; montrer que toute sécante menée dans un tel plan, par le point A où il rencontre Oz, coupe la cubique en des points S et S' tels que le produit $\overline{AS}.\overline{AS'}$ soit constant si le plan est fixe.

Aux points S, S', on mène les normales à la cubique; trouver le lieu de leur point de rencontre quand la sécante SAS' varie ainsi que le plan de la courbe.

Composition sur le calcul différentiel et intégral.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées formant un trièdre trirectangle de sommet O; on désigne par M un point quelconque d'une surface, par P et Q les points où le plan tangent à cette surface au point M rencontre respectivement les axes Ox, Oy.

1° Déterminer les surfaces, autres que les cônes de sommet O, satisfaisant à la condition que les deux triangles OMP, OMQ soient constamment équivalents entre eux. Ces surfaces sont les solutions de l'une ou de l'autre de deux équations aux dérivées partielles (E_1), (E_2), et se partagent en deux catégories, la première comprenant les surfaces S_1 solutions de (E_1) et la deuxième les surfaces S_2 solutions de (E_2). Peut-on passer d'une surface S_1 à une surface S_2 par une variation réelle et continue des paramètres qui entrent dans l'équation de la première?

Quelle peut être la trace sur le plan xOy d'une surface S_1 ou d'une surface S_2?

2° On désigne par (E) l'une des deux équations (E_1) ou (E_2), par γ une caractéristique de cette équation (E) et par Γ le cône ayant pour sommet l'origine O et pour directrice cette caractéristique γ. M étant un point de l'espace, on trace par ce point les deux droites D et D' respectivement perpendiculaires aux plans de sections circulaires du cône Γ qui passe par ce point M.

On suppose que M décrit un contour plan fermé C ne se coupant pas et ne rencontrant aucun des axes Ox, Oy et l'on suit séparément les variations correspondantes des droites D et D'. *Indiquer, suivant la nature du contour* C, *la situation* des positions finales de ces droites lorsqu'on les compare aux positions initiales, et le nombre de lignes fermées distinctes décrites par les traces de ces droites sur un plan parallèle à celui du contour C.

3° Sur une surface S, solution de l'une des équations (E_1) ou (E_2), on trace les lignes L conjuguées des caractéristiques γ; si l'on considère toutes les surfaces S passant par un même point M, quel est le lieu des lignes L assujetties à passer également par ce point M?

Peut-on trouver une famille F_1 composée de surfaces S_1 et une famille F_2 composée de surfaces S_2, telles que toute surface de la première coupe toute surface de la seconde suivant une ligne L? montrer que le problème est possible d'une infinité de manières et qu'on peut fixer arbitrairement une des surfaces de la famille F_1.

4° En désignant comme précédemment par γ une caractéristique de l'une des deux équations (E_1) ou (E_2), on considère dans l'espace des surfaces quelconques, telles cependant que chacune d'elles soit rencontrée en un seul point par chaque caractéristique γ; on appelle points correspondants sur ces surfaces, des points situés sur une même caractéristique et portions correspondantes, des portions dont les points se correspondent. Sur une de ces surfaces on prend une portion finie Σ qui n'est rencontrée par aucun des axes Ox, Oy et l'on forme pour cette portion l'intégrale de surface

$$I = \iint \left(\frac{\cos\alpha}{A} \pm \frac{\cos\beta}{B} \right) d\sigma,$$

$d\sigma$ étant un élément d'aire de Σ, A et B ses distances aux axes Ox, Oy, α et β les angles formés avec ces axes par la normale à l'élément.

Démontrer que, si l'on choisit convenablement le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que les caractéristiques γ appartiennent à l'une ou à l'autre des équations (E_1) ou (E_2), la valeur de l'intégrale I reste la même lorsqu'on l'étend à des portions correspondantes de surfaces différentes. Dans ces conditions, évaluer l'intégrale I en supposant que les caractéristiques γ rencontrant la portion Σ sont toutes celles dont les plans restent à une distance du point O au plus égale à une limite donnée l et telles, de plus, que la valeur absolue de l'angle formé avec Ox par la tangente en un point quelconque de l'une d'elles soit comprise entre deux limites λ et $\frac{\pi}{2} - \lambda$ $\left(0 < \lambda < \frac{\pi}{4}\right)$.

5° Étant donnée une surface fixe Σ_0, on demande de déterminer une autre surface Σ telle que les aires de deux portions correspondantes quelconques prises respectivement sur Σ_0 et Σ aient pour perpectives des aires équivalentes entre elles, lorsqu'on prend le point O comme point de vue et un plan parallèle au plan xOy comme plan du Tableau. Si l'équation de cette surface Σ est supposée sous la forme $F(x, y, z) = 0$, montrer que l'équation aux dérivées partielles à laquelle elle satisfait peut être intégrée par quadratures lorsqu'on prend comme nouvelles variables d'une part les deux paramètres qui déterminent chacune des caractéristiques γ, d'autre part une fonction homogène et de degré zéro de x, y, z.

Composition sur la Mécanique.

Un corps de révolution Σ homogène pesant, analogue à une toupie, repose par une pointe S sur un plan horizontal fixe H ; la pointe glisse sans frottement sur ce plan, le système n'est assujetti à aucune autre liaison et il n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur.

On désigne par G le centre de gravité de Σ et par l la distance SG; on définit le mouvement du corps par la variation des angles d'Euler, θ, ψ, φ qui sont respectivement l'angle de SG avec la verticale ascendante, l'angle de précession et l'angle de rotation propre; on désigne par r, q, p les composantes de la rotation instantanée suivant l'axe, l'horizontale perpendiculaire à l'axe et une perpendiculaire commune à ces deux droites, par μ et μ' les moments de rotation par rapport à l'axe et à la verticale du point G.

1° Écrire les équations du mouvement de Σ. En supposant qu'au début du mouvement la dérivée de θ par rapport au temps est nulle, à quelle condition doivent satisfaire les données initiales pour que θ conserve indéfiniment une valeur constante?

2° *Application numérique.* — On suppose que le corps Σ a toute sa masse concentrée sur une circonférence homogène dont le plan est perpendiculaire à l'axe, le centre G sur l'axe et le rayon égal à 10^{cm}; la distance SG ou l est égale à 20^{cm}, et l'intensité g de la pesanteur est prise égale à 980 C. G. S. La position initiale de l'axe SG est inclinée sur la verticale de l'angle $\frac{\pi}{6}$, et le mouvement initial est le mouvement résultant de deux rotations, l'une autour d'un axe vertical passant par G, avec une vitesse angulaire correspondant à n tours par seconde, l'autre autour de l'axe SG avec une vitesse angulaire correspondant à 50 tours par seconde. On demande de calculer la valeur numérique qu'il faut attribuer à n pour que θ conserve indéfiniment la même valeur qu'à l'instant initial.

3° Le corps Σ et les données initiales sont supposés quelconques, tels cependant que le point G se déplace suivant une verticale et que la pointe S repose constamment sur le plan H. A un certain moment on approche de Σ une droite rigide D que l'on maintient fixe, et cette droite D est choquée par le corps Σ à la manière des corps élastiques; on suppose qu'au moment du choc la droite D est perpendiculaire au plan vertical contenant SG, et l'on désigne par c sa cote au-dessus du plan H; on l'écarte après le choc de façon que le mouvement ultérieur de Σ ne soit pas gêné.

Si M_1 et M_2 sont les mouvements du corps Σ avant et après le choc, démontrer que les limites entre lesquelles varie θ sont plus étroites dans M_2 que dans M_1. Cette conclusion subsisterait-elle encore dans le cas où l'élasticité des corps choquants serait imparfaite?

4° On suppose que l'élasticité est parfaite, et l'on donne le mouvement M_1; peut-on choisir l'angle θ que fait, au moment du choc, l'axe SG avec la verticale pour que cet angle reste ensuite constant pendant le mouvement M_2? Quelles devront être les autres circonstances du choc? Indiquer, en particulier, suivant quelles lignes pourra s'exercer la percussion produite par le choc au point de contact de D et de Σ, et en déduire les positions que l'on peut attribuer à la droite D.

5° On considère dans ce qui suit le cas où le corps Σ comprend une tige infiniment mince dirigée suivant son axe et où le choc se fait en un point de cette tige dans les conditions du 4°; montrer qu'il existe en général deux positions possibles D', D'' de la droite D et déterminer ces positions. En supposant que l'on ait effectué, lorsque D occupe la position D', le calcul des percussions au moment du choc et des éléments du mouvement M_2, quelles modifications faudrait-il apporter aux résultats de ce calcul lorsque l'on fait occuper à la droite D l'autre position D''?

6° Comment doivent être choisies les circonstances du mouvement M_1 au moment du choc pour que l'une des positions D' ou D'' soit dans le plan H? Montrer que, si l'on place D dans l'autre position, le choc ne produit aucune percussion sur la pointe S. La distribution des masses de Σ peut-elle être telle que cette circonstance ne se produise pour aucun mouvement M_1?

7° Dans les conditions générales énoncées au 5°, discuter le nombre et la position de celles des droites D' ou D'' pour lesquelles le choc n'a pas pour effet de soulever la pointe S; examiner séparément le cas où, au moment du choc, l'axe du corps Σ dans le mouvement M_1 s'approche de la verticale, et le cas où il s'en éloigne.