

FARID BOULAD

Les polygones corrélatifs des funiculaires et leurs applications

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 311-326

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__311_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[R4d]

**LES POLYGONES CORRÉLATIFS DES FUNICULAIRES
ET LEURS APPLICATIONS;**

PAR M. FARID BOULAD,

Ingénieur au Service des ponts des chemins de fer
de l'État égyptien.

En appliquant au calcul des ponts la méthode nomographique des points alignés que notre ancien professeur M. d'Ocagne a créée par l'application du principe de dualité dans le domaine de la Nomographie, nous avons été incité, par les avantages de cette méthode, à effectuer une transformation analogue dans le domaine de la Statique graphique. Tel est l'objet de la présente Note. Mais, tandis que la transformation dualistique adoptée par M. d'Ocagne repose sur l'échange des coordonnées cartésiennes en coordonnées parallèles, celle à laquelle nous nous sommes arrêté ici, en raison des avantages spéciaux qu'elle offre pour l'objet que nous avons en vue, résulte de l'échange des coordonnées cartésiennes en un autre système de coordonnées tan-

gentielles, qui a fait aussi l'objet d'une étude développée de la part de M. d'Ocagne (¹).

Nous utiliserons cette dernière transformation pour former certains polygones qui permettent de résoudre graphiquement d'une façon simple, différente de celle des polygones funiculaires, les problèmes les plus usuels de la résistance des matériaux et de la stabilité des constructions.

Nous proposons d'appeler ces polygones *funiculaires corrélatifs*. Nous les appliquerons, dans cette Note, à la composition et à la détermination des moments statiques d'un système quelconque de forces, à la détermination des réactions d'appuis, des moments fléchissants et efforts tranchants développés dans une poutre à appuis simples, et à une nouvelle représentation graphique des moments fléchissants dans ces poutres.

Ces quelques applications suffiront à montrer l'utilité que présente ce genre de polygones pour diverses applications rentrant dans le domaine de la Statique graphique, et l'avantage qu'offre leur emploi quand il s'agit d'un tracé expéditif tout en évitant les erreurs de graphique que l'on peut craindre avec les funiculaires ordinaires en raison du tracé des parallèles aux rayons polaires.

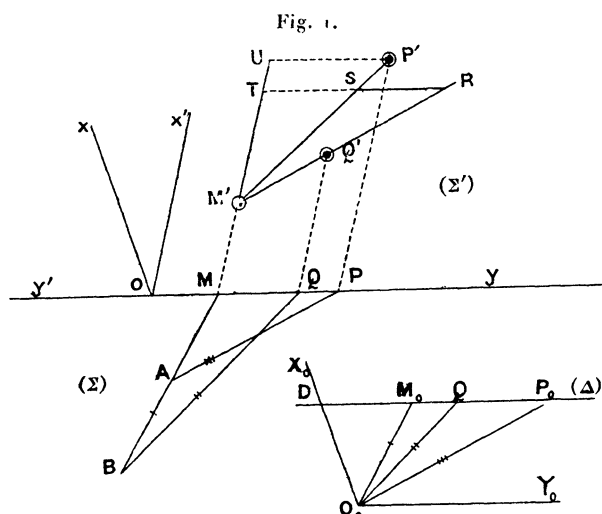
I. — NOTIONS RELATIVES AUX FIGURES CORRÉLATIVES.

Avant d'aborder les *funiculaires corrélatifs*, nous définirons la transformation corrélatrice sur laquelle repose la construction de ces polygones et nous éta-

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^e série, t. I, p. 433.

blirons une propriété métrique des figures corrélatives qui permet de faire dériver les propriétés de ces funiculaires corrélatifs de celles des funiculaires ordinaires.

1. Transformation géométrique corrélative de M. d'Ocagne ⁽¹⁾. — *Considérons une droite AM (fig. 1) dans*



le plan d'une figure Σ rapportée à deux axes (Ox, Oy) . Par l'origine arbitraire de deux axes (O_0x_0, O_0y_0) parallèles aux axes (Ox, Oy) , menons une parallèle O_0M_0 à la droite AM jusqu'à sa rencontre en M_0 avec la parallèle (Δ) , à l'axe O_0y_0 , menée par le point D de O_0x_0 , tel que $O_0D = 1$.

Si, à partir du point de rencontre M de la droite AM avec l'axe Oy , on porte, sur la parallèle menée par ce point à un axe Ox' , une longueur MM'

⁽¹⁾ Cette transformation s'obtient par simple échange, en coordonnées cartésiennes, des coordonnées tangentielles de M. d'Ocagne.

égale au coefficient angulaire DM_0 de la droite AM , le point M' appartiendra à une autre figure Σ' corrélatrice de Σ et correspondra, dans cette figure, à la droite AM de la première.

DÉMONSTRATION. — Rapportons la figure Σ' à deux axes (Ox', Oy') tels que Oy' se confonde avec l'axe des y négatifs.

Désignons par (x, y) les coordonnées d'un point courant de la droite AM et par (x', y') les coordonnées du point corrélatif M' de cette droite.

D'après l'énoncé de la proposition ci-dessus, (x', y') représentent, pour la droite AM , les coordonnées tangentielles de M . d'Ocagne. L'équation de cette droite, rapportée aux axes (Ox, Oy) , s'écrit

$$y + y' = xx'.$$

Cette équation étant linéaire par rapport aux coordonnées $x' = MM'$, $y' = -OM$ du point M' , les deux figures Σ et Σ' sont *corrélatives*; elles sont aussi *réci-proques*. Nous les rapporterons, dans tout ce qui suit, respectivement aux deux systèmes d'axes (Ox, Oy) et (Ox', Oy') .

REMARQUE. — D'après le mode de transformation précédent, quand une droite de la figure Σ est parallèle à l'axe Ox , son point corrélatif est son point de rencontre avec l'axe Oy .

Toutes les droites de cette même figure, parallèles à une direction quelconque, ont leurs points corrélatifs, dans Σ' , situés sur une parallèle à Oy , laquelle sera dite *ligne de rappel* relative à cette direction.

2. Propriété métrique relative aux figures corrélatives Σ et Σ' . — *Le segment AB intercepté sur une droite AM ,*

dans la figure Σ , par deux autres AP et BQ ayant P' et Q' pour points corrélatifs respectifs dans la figure Σ' , est égal, dans cette dernière, au segment SR intercepté, par les deux droites M'P' et M'Q' sur la parallèle TR, à l'axe Oy, menée par le point T tel que le segment M'T, parallèle à Ox', soit égal au rayon O_0M_0 parallèle à AM.

DÉMONSTRATION. — Soient P et Q les points de rencontre respectifs des deux droites AP et BQ avec l'axe Oy; menons par P' une parallèle à Oy jusqu'à sa rencontre en U avec MM'. Les deux triangles semblables MAP et $M_0O_0P_0$ donnent

$$\frac{AM}{MP} = \frac{O_0M_0}{M_0P_0}.$$

De même, la similitude des deux triangles UM'P' et TM'S donne

$$\frac{TS}{UP'} = \frac{M'T}{M'U};$$

mais, comme

$$MP = UP', \quad O_0M_0 = M'T$$

et

$$M_0P_0 = PP' - MM' = M'U,$$

on en déduit

$$TS = AM.$$

De même, pour le segment BM, on aura

$$TR = BM$$

et, par suite,

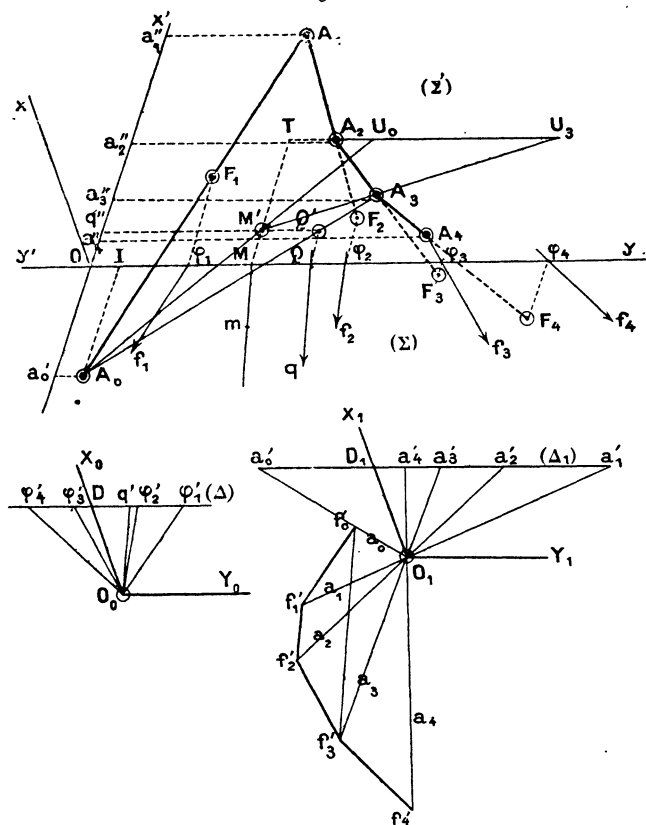
$$SR = AB.$$

II. — FUNICULAIRES CORRÉLATIFS.

3. Cas général d'un système de forces non concourantes. — Considérons un système de forces $\varphi_1 f_1, \varphi_2 f_2,$

$\varphi_3 f_3, \varphi_4 f_4$ (*fig. 2*) dont les lignes d'action sont supposées appartenir à une figure plane Σ .

Fig. 2.



Construisons à côté de cette figure un faisceau de droites $(O_0, \varphi'_1 \varphi'_2 \varphi'_3 \varphi'_4)$ respectivement parallèles à ces lignes d'action. Rapportons la figure Σ à deux axes (Ox, Oy) tels que Oy rencontre ces mêmes lignes d'action en des points accessibles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, et soit parallèle à une droite arbitraire (Δ) , laquelle coupe

aussi, en des points accessibles $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3, \varphi'_4$, les droites du faisceau $(O_0, \varphi'_1 \varphi'_2 \varphi'_3 \varphi'_4)$.

Transportons les axes (Ox, Oy) parallèlement à eux-mêmes en (O_0X_0, O_0Y_0) , et soit D le point de rencontre de l'axe O_0X_0 avec la droite (Δ) .

Si l'on porte, en tenant compte des signes, les segments $D\varphi'_1, D\varphi'_2, D\varphi'_3, C\varphi'_4$ respectivement en $\varphi_1F_1, \varphi_2F_2, \varphi_3F_3, \varphi_4F_4$ sur les parallèles menées à l'axe Ox' par les points $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, les points F_1, F_2, F_3, F_4 appartiendront, d'après le n° 1, à une figure Σ' corrélative de Σ , et représentant les points corrélatifs des droites f_1, f_2, f_3, f_4 de la figure Σ .

Cela posé, considérons le polygone dynamique $f'_0f'_1f'_2f'_3f'_4$ des forces ci-dessus et supposons que la figure Σ soit un polygone funiculaire correspondant à ces forces et à un pôle O_1 et ayant son côté initial qui rencontre en un point I l'axe Oy .

Désignons par a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 les rayons polaires issus du pôle O_1 et aboutissant aux sommets $f'_0, f'_1, f'_2, f'_3, f'_4$ du polygone dynamique; appelons $(a_0), (a_1), (a_2), (a_3), (a_4)$ les côtés du polygone funiculaire Σ respectivement parallèles à ces rayons polaires. Proposons-nous de construire, au moyen de la transformation précédente, le polygone corrélatif de ce funiculaire sans recourir à ce dernier.

A cet effet, déterminons d'abord les coefficients angulaires des côtés du funiculaire Σ . Pour cela, transportons les axes (Ox, Oy) parallèlement à eux-mêmes en (O_1X_1, O_1Y_1) , en prenant comme nouvelle origine le pôle O_1 . Prolongeons les rayons polaires a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 jusqu'à leurs rencontres respectives en $a'_0, a'_1, a'_2, a'_3, a'_4$ avec la parallèle (Δ_1) , à O_1Y_1 , menée par le point D_1 de O_1X_1 tel que $O_1D_1 = OD$.

Les distances des points $a'_0, a'_1, a'_2, a'_3, a'_4$ au

point D_i représentent les coefficients angulaires des côtés ci-dessus $(a_0), (a_1), \dots, (a_4)$. Portons ces points respectivement en $a''_0, a''_1, a''_2, a''_3, a''_4$ sur l'axe Ox' en faisant coïncider D_i avec l'origine O .

D'après le n° 1, les points corrélatifs A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 des côtés $(a_0), (a_1), \dots, (a_4)$ du funiculaire Σ sont situés respectivement sur les parallèles menées par les points $a'_0, a'_1, a'_2, a'_3, a'_4$ à Oy , lesquelles constituent les lignes de rappel respectivement relatives aux directions de ces côtés.

A présent, comme nous savons qu'à un système de trois droites concourantes de ce funiculaire correspondent trois points alignés, dans la figure Σ' , et que la parallèle IA_0 menée par I à Ox' coupe la ligne de rappel a''_0A_0 relative au rayon a_0 , au sommet A_0 corrélatif du côté initial (a_0) , nous pourrons construire aisément le polygone corrélatif du funiculaire Σ , en appliquant la marche suivante :

On part du sommet initial A_0 connu, on mène l'alignement $A_0F_1A_1$ jusqu'à sa rencontre en A_1 avec la ligne de rappel a''_1 , ensuite on tire l'alignement $A_1F_2A_2$ jusqu'à sa rencontre en A_2 avec la ligne de rappel a''_2 , puis l'alignement $A_2F_3A_3$ jusqu'à sa rencontre en A_3 avec la ligne de rappel a''_3 , et ainsi de suite, en suivant les remarques I et II du n° 4. On obtient ainsi le polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$ corrélatif de Σ . Ce polygone est le *funiculaire corrélatif* dont il s'agit correspondant aux forces ci-dessus, au pôle O_1 et ayant comme sommet initial A_0 .

4. Définition des funiculaires corrélatifs. — *Les funiculaires corrélatifs correspondant à un système de forces et à un pôle sont des polygones dont les côtés passent par les points corrélatifs de ces forces*

et dont les sommets sont situés sur les parallèles menées à Oy à des distances proportionnelles aux coefficients angulaires des rayons polaires issus de ce pôle et aboutissant aux sommets du polygone dynamique.

REMARQUE I. — *A tout rayon polaire qui aboutit à l'intersection de deux forces, dans le polygone dynamique, répond, sur le funiculaire corrélatif, un sommet situé sur la parallèle menée, à l'axe Oy, à une distance égale au coefficient angulaire de ce rayon.*

REMARQUE II. — *A trois côtés d'un triangle constitué, dans le polygone dynamique, par une force et deux rayons polaires aboutissant aux extrémités de celle-ci, répondent, dans le funiculaire corrélatif, trois points alignés dont deux sont les deux sommets consécutifs correspondant à ces deux rayons polaires et le troisième est le point corrélatif de cette force.*

§. Propriétés géométriques des funiculaires corrélatifs.
— *Quand on change de pôle O_1 , les côtés du funiculaire corrélatif pivotent autour des points corrélatifs F_1, F_2, F_3, F_4 des forces.*

Deux funiculaires corrélatifs d'un même système de forces, correspondant à deux pôles distincts, ont leurs sommets correspondants situés sur des droites concourant en un point C de la ligne de rappel relative à la droite de ces deux pôles (¹).

(¹) Cette propriété est corrélatrice de la suivante bien connue : les côtés correspondants de deux funiculaires ordinaires relatifs à deux pôles se coupent sur un même axe parallèle à la droite unissant ces deux pôles,

Pour avoir ce point C, il suffit de prendre l'alignement de deux sommets correspondants quelconques des funiculaires corrélatifs considérés; cet alignement coupe, au point C, la ligne de rappel relative à la droite unissant les deux pôles.

6. Cas particuliers d'un système de forces concourantes ou parallèles. — Dans le cas d'un système de forces concourantes, les points corrélatifs F_1, F_2, F_3, F_4 des forces sont en ligne droite. Deux funiculaires corrélatifs correspondant à deux pôles distincts sont *homologiques*; ils ont pour *axe d'homologie* la droite des points $F_1, \dots, F_4$ et pour *centre d'homologie* le point C défini ci-dessus.

Dans le cas des forces parallèles, en prenant l'axe Ox parallèle à ces forces, les points corrélatifs de celles-ci sont leurs points de rencontre respectifs avec l'axe Oy , comme nous le verrons sur la figure 3 relative à une application aux poutres droites.

III. — APPLICATION DES FUNICULAIRES CORRÉLATIFS A LA COMPOSITION ET A LA DÉTERMINATION DES MOMENTS STATIQUES DES FORCES.

7. Composition et équilibre des forces. — Proposons-nous de déterminer la résultante q (*fig. 2*) d'un nombre quelconque de forces, de trois forces f_1, f_2, f_3 par exemple.

A cet effet, remarquons que cette résultante est représentée, dans le polygone dynamique, en grandeur, direction et sens, par le vecteur $f'_0 f'_3$. Pour qu'elle soit déterminée en position, il suffit d'avoir un point de sa ligne d'action, son point de rencontre Q avec l'axe Oy par exemple.

Or, comme les deux côtés (a_0) et (a_3) du funiculaire Σ se coupent sur cette résultante, le point corrélatif Q' de cette dernière est le point de rencontre de l'alignement A_0A_3 des points corrélatifs de ces deux côtés avec la ligne de rappel $q''Q'$ relative au vecteur $f'_0f'_3$ de cette résultante. Ce point Q' étant situé aussi sur la parallèle QQ' à Ox' , il s'ensuit que, pour avoir le point Q , il suffit de mener par O une parallèle au vecteur $f'_0f'_3$ jusqu'à sa rencontre en q' avec la droite (Δ) , ensuite de porter Dq' en Oq'' sur Ox' et de projeter en Q , suivant Ox' , le point de rencontre Q' de l'alignement A_0A_3 avec la ligne de rappel $q''Q'$ relative à $f'_1f'_3$.

De là découle une généralisation de la remarque II du n° 4.

REMARQUE. — *Aux trois côtés d'un triangle constitué, dans le polygone dynamique, par le vecteur de la résultante d'un nombre quelconque de forces et par les deux rayons polaires aboutissant aux extrémités de ce vecteur, répondent dans le funiculaire corrélatif trois points alignés dont deux sont les deux sommets correspondant à ces deux rayons polaires et le troisième est le point corrélatif de cette résultante.*

CONDITION D'ÉQUILIBRE GRAPHIQUE DES FORCES. — *A un système de forces dont le polygone dynamique se ferme, correspond un funiculaire qui se ferme aussi.*

8. Moments statiques des forces. — Soit à déterminer le moment des trois forces f_1, f_2, f_3 par rapport à un point quelconque m de la figure 2.

Nous savons que ce moment est égal au produit de la distance polaire du vecteur $f'_0 f'_3$ par le segment intercepté, sur la parallèle en M à ce vecteur, par les deux côtés (a_0) , (a_3) du funiculaire Σ . Or, ce segment est égal, dans le funiculaire corrélatif Σ' , au segment $U_0 U_3$ qu'on obtient, d'après le n° 2, en procédant comme suit :

On détermine le point corrélatif M' de la parallèle mM à $f'_0 f'_3$, on joint ce point M' aux deux sommets A_0 , A_3 correspondant aux rayons polaires aboutissant aux extrémités du vecteur $f'_0 f'_3$, et l'on porte sur l'abscisse MM' une longueur M'T égale au rayon $O_0 q'$ parallèle à $f'_0 f'_3$. Les deux droites M'A₀ et M'A₃ interceptent, sur la parallèle TU₀ à Oy, un segment U₀U₃ dont le produit par la distance polaire du vecteur $f'_0 f'_3$ est le moment demandé.

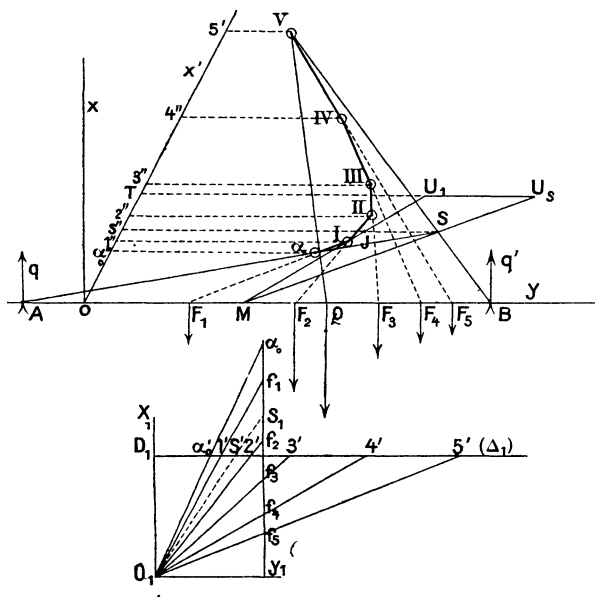
IV. — APPLICATION AU CALCUL DES POUTRES A APPUIS SIMPLES.

9. Funiculaires corrélatifs. — Considérons une poutre reposant librement sur deux appuis A et B (*fig. 3*) et supportant en des points F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , F_5 un système quelconque de charges isolées f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 . Cherchons à déterminer au moyen des funiculaires corrélatifs la résultante de ces charges, les réactions d'appuis, les moments fléchissants et efforts tranchants développés dans cette poutre.

A cet effet, prenons AB pour axe Oy, l'axe Ox parallèle à ces forces et une direction arbitraire pour l'axe Ox'. Choisissons un pôle O₁, à côté du polygone dynamique $\alpha_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5$ de ces charges, lequel se réduit ici à une droite. Menons O₁X₁ parallèle à Ox,

et coupons cet axe et les rayons polaires $O_1\alpha_0$, O_1f_1 , O_1f_2 , ..., O_1f_5 par une parallèle (Δ_1) à O_1y , respectivement en des points D_1 , α'_0 , $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ que nous porterons en O , α''_0 , $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, $5''$ sur l'axe Ox' . Les parallèles menées par ces derniers points à l'axe Oy

Fig. 3.



constituent les **lignes** de rappel relatives aux rayons polaires ci-dessus. **A** présent, remarquons que les points F_1 , F_2 , ..., F_5 sont corrélatifs des lignes d'action des charges considérées agissant en ces mêmes points. Pour construire un funiculaire corrélatif $(\alpha, I, II, III, IV, V)$ relatif à un pôle O_1 , on part du sommet initial, pris arbitrairement sur la ligne de rappel α''_0 relative au rayon initial $O_1\alpha_0$, et l'on tire, d'après les remarques I et II du n° 4, les **alignements**

consécutifs $F_1 \alpha I$, $F_2 I II$, $F_3 II III$, ... qui se coupent sur les lignes de rappel α''_0 , $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, ... respectivement relatives aux rayons polaires $O_1 \alpha_0$, $O_1 f_1$, $O_1 f_2$,

10. Résultante des charges. — Remarquons que le point corrélatif de la ligne d'action de cette résultante est son point de rencontre Q avec l'axe Oy , et que ce point est situé, d'après la remarque du n° 8, sur l'alignement des deux sommets extrêmes correspondant aux polaires aboutissant aux extrémités de cette résultante dans le polygone dynamique. Il s'ensuit qu'on obtient immédiatement cette résultante en menant l'alignement αV qui coupe AB en un point Q de sa ligne d'action.

11. Réactions des appuis. — Désignons par q et q' les réactions développées respectivement en A et B ; soit $O_1 S_1$ le rayon polaire qui détermine sur $\alpha_0 f_3$ les vecteurs $\alpha_0 S_1 = q$ et $S_1 f_3 = q'$ de ces réactions. Appelons S le sommet, dans le funiculaire corrélatif, répondant à ce rayon polaire.

Ce sommet est le point de rencontre des deux droites $A\alpha$ et BV , en raison de ce que A et B sont les points corrélatifs respectifs des lignes d'action des réactions q et q' développées en ces points, et de ce que, aussi, d'après la remarque du n° 8, aux trois côtés du triangle $S_1 \alpha_0 O_1$ correspondent les trois points alignés A , α et S , et aux trois côtés du triangle $f_3 S_1 O_1$ correspondent aussi les trois points alignés B , S et V .

En menant la parallèle Ss'' à Oy jusqu'à sa rencontre en s'' avec $O'x$, et en portant Os'' en $D_1 S'$ sur la droite (Δ_1) , on obtient le rayon $O_1 S'S_1$ qui détermine sur $\alpha_0 f_3$ les réactions ci-dessus.

12. Moments fléchissants. — Cherchons le moment fléchissant développé en un point quelconque M de AB . Ce moment est produit par les forces agissant sur le tronçon AM , savoir : la réaction q et la charge f concentrée en F , ayant comme résultante, dans le polygone dynamique, le vecteur $S_1 f_1$.

Pour avoir ce moment, on appliquera le n° 8 : on porte $O_1 D_1$ en OT sur l'axe Ox' , et l'on joint le point M aux deux sommets I et S correspondant aux rayons polaires $O_1 f_1$ et $O_1 S_1$ aboutissant aux extrémités du vecteur ci-dessus $S_1 f_1$. Le produit de la distance polaire $O_1 Y_1$ par le segment $U_1 U_s$ intercepté, sur la parallèle TU_1 à Oy , par les deux droites MI et MS , est le moment demandé.

REMARQUE. — Quel que soit le point M , le segment représentatif du moment développé en ce point est déterminé sur une même droite fixe TU_1 . Au lieu de ce segment $U_1 U_s$, on pourrait prendre le segment JS intercepté sur la parallèle $s''S$ à Oy par les deux droites MI et MS , à condition d'adopter comme nouvelle distance polaire $\delta = \frac{OY_1 \times Os''}{OT}$. Dans ce cas, tous les segments représentatifs des moments ont même origine S .

13. Efforts tranchants. — Le vecteur $S_1 f_1$, dans le polygone dynamique, représente l'effort tranchant développé en M .

14. Nouvelle représentation graphique des moments fléchissants au moyen des funiculaires corrélatifs. — Si l'on prend un second pôle O_2 à l'intersection de l'axe $O_1 X_1$ avec la parallèle menée par T à l'axe Oy , le sommet de fermeture S , dans le polygone corré-

latif relatif à ce pôle, sera rejeté à l'infini suivant Ox' . Dans ce cas, le moment fléchissant en un point M sera représenté par le coefficient angulaire, par rapport aux axes (Ox', Oy') , de la droite qui joint ce point M au sommet I correspondant au rayon polaire aboutissant au point commun de deux forces consécutives comprenant dans leur intervalle ce point M.

On construit ce funiculaire aisément, en remarquant, d'après le n° 5, qu'il constitue avec celui correspondant au pôle O, deux figures *homologiques* ayant Oy pour *axe d'homologie*, et, pour *centre d'homologie*, le point de rencontre de AB avec la parallèle menée par le sommet S à l'axe Ox' .