

AMSLER

Sur les propriétés d'addition d'une suite récurrente considérée par D. Bernoulli

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 297-304

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__297_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[H12d]

**SUR LES PROPRIÉTÉS D'ADDITION D'UNE SUITE RÉCURRENTE
CONSIDÉRÉE PAR D. BERNOULLI;**

PAR M. AMSLER.

Étant donnée une équation

$$f(x) = x^m - p_1 x^{m-1} - p_2 x^{m-2} - \dots - p_m = 0$$

dont les racines sont $a, b, c, \dots, l$, on considère les coefficients des puissances décroissantes de x dans le développement de $\frac{1}{f(x)}$, que l'on appelle $u_{m-1}, u_m, \dots, u_n, \dots$

On démontre aisément que l'on a

$$u_{n+1} = p_1 u_n + p_2 u_{n-1} + \dots + p_m u_{n-m+1}$$

et, pour plus de commodité dans la théorie générale,

$$u_n = \sum \frac{a^n}{(a-b) \dots (a-l)}.$$

Nous allons étudier les propriétés d'addition de u relativement à n .

Forme symbolique de u_n . — Considérons les m équations suivantes linéaires par rapport aux quantités telles que $\frac{a^n}{(a-b) \dots (a-l)}$:

$$\begin{aligned} \sum \frac{a^n}{(a-b) \dots (a-l)} &= u_n, \\ \sum a \frac{a^n}{(a-b) \dots (a-l)} &= u_{n+1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \sum a^{m-1} \frac{a^n}{(a-b) \dots (a-l)} &= u_{n+m-1}. \end{aligned}$$

On en conclut

$$\frac{a^n}{(a-b)\dots(a-l)} = \frac{\begin{vmatrix} u_n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ u_{n+1} & b & c & \dots & l \\ \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{n+m-1} & b^{m-1} & c^{m-1} & \dots & l^{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & \cdot & \dots & l \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a^{m-1} & b^{m-1} & \cdot & \dots & l^{m-1} \end{vmatrix}}.$$

Les deux termes de la fraction sont divisibles par le produit des différences des racines $b, c, \dots, l$.

Imaginons que les indices des u soient placés en exposants symboliques; on a, en supprimant le facteur commun $\Pi(b-c)$:

$$\frac{a^n}{(a-b)\dots(a-l)} = \frac{u^{(n)}(u-b)(u-c)\dots(u-l)}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)}.$$

D'où la formule symbolique

$$a^n = u^{(n)}(u-b)(u-c)\dots(u-l).$$

Usage de la notation symbolique. — Cette notation est d'un maniement commode.

Calculons, par exemple, la fonction symétrique Σa^n en fonction des u ; on a

$$\Sigma a^n = \Sigma u^{(n)}(u-b)\dots(u-l) = u^{(n)} \Sigma (u-b)\dots(u-l),$$

c'est-à-dire

$$\Sigma a^n = u^{(n)} f'(u),$$

$$\Sigma a^n = m u_{m+n-1} - (m-1) p_1 u_{m+n-2} - \dots$$

Calculons encore la fonction $\sum \frac{a^n}{a-b}$.

Pour cela, nous groupons les deux termes $\frac{a^n}{a-b}$

et $\frac{b^n}{b-a}$ dont la somme est

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{u^{(n)} [(u-b)(u-c)\dots(u-l) - (u-a)(u-c)\dots(u-l)]}{a-b}$$

ou

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = u^{(n)}(u - c)(u - d) \dots (u - l),$$

$$\sum \frac{a^n}{a - b} = u^{(n)} \Sigma (u - c)(u - d) \dots (u - l).$$

Mais on a

$$f'(u) = \Sigma (u - b)(u - c) \dots (u - l),$$

et, en dérivant,

$$f''(u) = 2 \Sigma (u - c)(u - b) \dots (u - l),$$

puisque'un terme tel que $(u - c)(u - d) \dots (u - l)$ peut s'obtenir de deux façons. On a donc

$$\sum \frac{a^n}{a - b} = \frac{1}{2} u^{(n)} f''(u).$$

On verrait, en dérivant une fois de plus, que l'on a

$$\sum \frac{a^n}{(a - b)(a - c)} = \frac{1}{2.3} u^{(n)} f'''(u),$$

et d'une façon générale

$$\sum \frac{a^n}{(a - b) \dots (a - h)} = \frac{u^{(n)}}{p!} f^{(p)}(u),$$

p étant le nombre des racines $a, b, \dots, h$.

Comme vérification, on a bien

$$\sum \frac{a^n}{(a - b) \dots (a - l)} = \frac{u^{(n)}}{n!} f^{(n)}(u).$$

Addition des u. — Pour la commodité de l'écriture, soit v une lettre qui est la même que u et que l'on remplacera par u . une fois le calcul symbolique achevé.

Nous avons

$$\begin{aligned} a^n &= u^{(n)} (u - b) \dots (u - l), \\ a^{n'} &= v^{(n')} (v - b) \dots (v - l). \end{aligned}$$

Il viendra

$$a^{n+n'} = u^{(n)} v^{(n')} [(u - b)(u - c) \dots (u - l)(v - b)(v - c) \dots (v - l)].$$

Notre but est l'évaluation de

$$u_{n+n'} = \sum \frac{a^{n+n'}}{(a - b) \dots (a - l)}.$$

Il vient donc

$$a^{n+n'} = u^{(n)} v^{(n')} \sum \frac{(u - b)(u - c) \dots (u - l)(v - b)(v - c) \dots (v - l)}{(a - b)(a - c) \dots (a - l)}.$$

Je dis que le Σ est identique au polynome

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v}.$$

On voit, en effet, que ce polynome et le Σ sont des polynomes en u de degré $m - 1$, qui prennent les mêmes valeurs pour $u = a, b, \dots, l$, puisque, pour $u = a$, par exemple, on a de part et d'autre

$$(v - b)(v - c) \dots (v - l).$$

On a donc, symboliquement,

$$u_{n+n'} = u^{(n)} v^{(n')} \frac{f(u) - f(v)}{u - v}.$$

Pour bien expliquer le retour de la notation symbolique aux indices, prenons pour $f(x)$ un polynome du deuxième degré : $f(x) = x^2 - px - q$

$$\begin{aligned} u_{n+n'} &= u^{(n)} v^{(n')} \frac{[(u^2 - pu - q) - (v^2 - pv - q)]}{u - v} \\ &= u^{(n)} v^{(n')} (u + v - p), \\ u_{n+n'} &= u_{n+1} u_{n'} + u_{n'+1} u_n - p u_n u_{n'}. \end{aligned}$$

Exemple. — Dans la suite de Fibonacci, que l'on obtient pour $f(x) = x^2 - x - 1$ et dans laquelle chaque terme est la somme des deux précédents :

$$\begin{array}{l|l}
 u_1 & 1 \\
 u_2 & 1 \\
 u_3 & 2 \\
 u_4 & 3 \\
 u_5 & 5 \\
 u_6 & 8 \\
 u_7 & 13 \\
 u_8 & 21 \\
 u_9 & 34 \\
 u_{10} & 55 \\
 u_{11} & 89 \\
 u_{12} & 144 \\
 u_{13} & 233 \\
 u_{14} & 377
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 u_{9+5} = u_{14} = u_{10}u_5 + u_9u_6 - u_9u_5 \\
 377 = 5 \times 55 + 8 \times 34 - 5 \times 34. \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}$$

Prenons encore : $f(x) = x^3 - px^2 - qx - r$

$$u_{n+n'} = u^{(n)}v^{(n')}[u^2 + uv + v^2 - p(u+v) - q].$$

Ici, on peut simplifier la formule d'addition au moyen de la loi de récurrence, $u^3 - pu^2 - qu - r$ devant être regardé comme nul,

$$\begin{aligned}
 u_{n+n'} &= u^n v^{n'} uv + u^n v^{n'-1} (v^2 - pv^2 - qv) \\
 &\quad + u^{n-1} v^{n'} (u^3 - pu^2 - qu) + qu^n v^{n'}, \\
 u_{n+n'} &= u^{n+1} v^{n'+1} + r(u^n v^{n'-1} + u^{n-1} v^{n'}) + qu^n v^{n'}, \\
 u_{n+n'} &= u_{n+1} u_{n'+1} + r(u_n u_{n'-1} + u_{n'} u_{n-1}) + qu_n u_{n'}.
 \end{aligned}$$

Exemple. — $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; on obtient comme suite les nombres triangulaires

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & \dots, \\
 u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & \dots \\
 u_{6+4} = u_{10} &= u_7 u_3 + u_6 u_3 + u_4 u_5 - 3 u_4 u_6, \\
 45 &= 210 + 45 + 60 - 270.
 \end{array}$$

FORMULES DE MULTIPLICATION. — Si, dans la formule qui donne $u_{n+n'}$, on fait $n' = n$, on aura une formule qui donne u_{2n} . De même, en faisant $n' = n - 1$, on calculera u_{2n-1} .

Exemple. — $f(x) = x^2 - px - q$.

$$u_{2n} = 2u_n u_{n+1} - pu_n^2 = pu_n^2 + 2qu_n u_{n-1},$$

$$u_{2n-1} = u_n^2 + u_{n-1} u_{n+1} - pu_n u_{n-1} = u_n^2 + qu_{n-1}^2.$$

On voit que ces formules donnent de proche en proche u_{2^k} et u_{2^k-1} , on effectue ainsi la duplication; il est évident qu'en choisissant n' égal à $2n$ et se servant de la duplication, on effectuerait la triplification, etc. Mais il est plus simple d'appliquer l'addition à plus de deux indices.

Addition à 3, 4, ... indices. — On verrait comme plus haut que l'on a

$$u_{n+n'+n''} = u^{(n)} v^{(n')} w^{(n'')} \sum \frac{f(v)f(w)}{(u-v)(u-w)}.$$

Calculons cette formule pour $f(x) = x^2 - px - q$

$$\sum \frac{f(v)f(w)}{(u-v)(u-w)} = \frac{\begin{vmatrix} f(v)f(w) & u & 1 \\ f(w)f(u) & v & 1 \\ f(u)f(v) & w & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u^2 & u & 1 \\ v^2 & v & 1 \\ w^2 & w & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} u f(u) & f(u) & 1 \\ v f(v) & f(v) & 1 \\ w f(w) & f(w) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u^2 & u & 1 \\ v^2 & v & 1 \\ w^2 & w & 1 \end{vmatrix}}.$$

En décomposant les colonnes des numérateurs en colonnes partielles, on a aisément

$$\sum = vw + wu + uv - p(u + v + w) + p^2 + q$$

et

$$u_{n+n'+n''} = u^{(n)} v^{(n')} w^{(n'')} \sum \frac{f(v)f(w)}{(u-v)(u-w)}.$$

On verrait de même que

$$u_{n+n'+n''+n'''} = -u^{(n)} v^{(n')} w^{(n'')} s^{(n''')} \sum \frac{f(v)f(w)f(s)}{(u-v)(u-w)(u-s)}, \quad \dots; \\ \text{etc.}$$

APPLICATIONS. — Les propriétés précédentes s'appliquent dans le calcul des racines par la méthode de Bernoulli et dans l'étude de la décomposition des termes des suites numériques en facteurs.

Exemple. — Calcul de $\sqrt{2}$ par la suite de Pell,

$$x^2 = 2,$$

on a

$$y^2 - 2y - 1 = 0.$$

En posant

$$x = 1 + \frac{1}{y},$$

on sait que

$$\sqrt{2} - 1 = \lim \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

2+1	1-2-1
4+ 2	1+2+5+12+29+70+169
10+ 5	+408+985+2178+5741
24+13	
58+ 29	
140+ 70	
338+169	
816+ 408	
1570+ 985	
4756	
$u_9 = 985,$	$u_{19} = \overline{2378^2} + \overline{985^2},$
$u_{10} = 2378,$	$u_{20} = 2 \times \overline{2378^2} + 2 \times 2378 \times 985,$
$u_{11} = 5741,$	$u_{21} = \overline{2378^2} + \overline{5741^2} \text{ ou } 2u_{20} + u_{19}.$

On a calculé ainsi u_{20} et u_{19} par duplication sans avoir besoin des u intermédiaires entre u_{11} et u_{19} .

On a, d'ailleurs,

$$\frac{u_{19}}{u_{20}} > \sqrt{2} - 1 > \frac{u_{20}}{u_{21}},$$

avec

$$\frac{u_{19}}{u_{20}} - \frac{u_{20}}{u_{21}} = \frac{1}{u_{19} \cdot u_{20}}.$$

Exemple. — On conclut des formules établies plus haut que, pour $f(x) = x^2 - px - q$ (p et q entiers), que u_r divise u_{nr} (autrement : $\frac{a^{nr} - b^{nr}}{a - b}$ est divisible par $\frac{a^r - b^r}{a - b}$).

Exemple. — Si, dans $x^2 - px - q$, on a $q = -a^2$, tous les u_{2n+1} se décomposent comme suit :

$$u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - a^2 u_n^2 = (u_{n+1} + au_n)(u_{n+1} - au_n).$$

Exemple. — Pour $f(x) = x^2 - px - q$, on a

$$u_{3m+1} = u_{m+1}^3 + 3qu_{m+1}u_m^2 - pqu_m^3;$$

s'il y a un nombre entier N tel que

$$N^3 + 3qN - pq = 0,$$

on connaît une décomposition de u_{3m+1} en facteurs.