

PHILBERT DU PLESSIS

**Concours d'admission à l'École
polytechnique en 1907. Composition de
géométrie analytique et mécanique**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 270-277

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__270_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

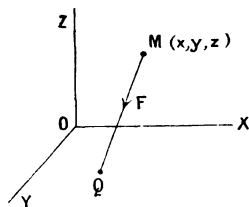
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1907.
COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.**

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On considère trois axes de coordonnées rectangulaires Ox , Oy , Oz . A tout point $M(x, y, z)$ de l'espace on fait correspondre le point Q de coor-

données $\frac{a^2 x}{x^2 + y^2}$, $\frac{a^2 y}{x^2 + y^2}$, 0; a étant une constante. Le point M , dont on suppose la masse égale à l'unité, est sollicité par une force MF , dirigée sui-



vant MQ (et dans le sens MQ), et dont la grandeur absolue est égale au produit de MQ par un coefficient donné, K^2 .

1° Evaluer les projections de la force MF sur les axes Ox , Oy , Oz .

2° Dans le champ de forces ainsi défini, déterminer les surfaces de niveau et les lignes de force.

3° Le point M se mouvant sous l'action de la force MF , chercher le mouvement de sa projection M' sur Oz .

4° On fera voir que l'on peut disposer des conditions initiales du mouvement du point M , de façon que la trajectoire de ce point se projette sur le plan des xy suivant un cercle donné, de centre O , et de rayon R supérieur à a . Exprimer, dans ce cas, les coordonnées du point M en fonction du temps. Tâcher d'interpréter cinématiquement ce mouvement.

5° En supposant toujours remplies les conditions initiales dont il s'agit au 4°, démontrer que la trajectoire du point M est une courbe algébrique si le

rapport $\frac{R^2 - a^2}{R^2}$ est le carré d'un nombre rationnel.

1. Les projections de la force MF s'écrivent immédiatement

$$(1) \quad \begin{cases} X = K^2 \left(\frac{a^2 x}{x^2 + y^2} - x \right), \\ Y = K^2 \left(\frac{a^2 y}{x^2 + y^2} - y \right), \\ Z = -K^2 z. \end{cases}$$

2. On en déduit, pour le travail élémentaire de la force,

$$X dx + Y dy + Z dz = K^2 \left[\frac{a^2 (x dx + y dy)}{x^2 + y^2} - x dx - y dy - z dz \right] = dU,$$

si l'on pose

$$U = \frac{K^2}{2} [a^2 \log(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 + z^2)]$$

(log désignant un logarithme népérien). Les surfaces de niveau sont donc données par

$$(2) \quad a^2 \log(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 + z^2) = \lambda,$$

λ étant une constante arbitraire. Ce sont des surfaces de révolution autour de Oz. Pour étudier leurs méridiennes, coupons-les par le plan $y = 0$, ce qui donne

$$z = \pm \sqrt{a^2 \log x - x^2 - \lambda}.$$

La fonction φ sous le radical part de $-\infty$ (asymptotiquement à Oy) pour revenir à $-\infty$ après avoir atteint un maximum correspondant à la racine unique de la dérivée, $x = a$, maximum donné par

$$m = a^2(2 \log a - 1) - \lambda.$$

On n'aura donc de valeurs réelles pour z qu'autant que m sera positif, ce qui exige

$$\lambda < a^2(2 \log a - 1).$$

Pour une telle valeur de λ , la fonction φ s'annule pour deux valeurs, x_1 et x_2 , comprenant la valeur a ; dans cet intervalle, on a, pour chaque valeur de x , deux valeurs de z égales et de signe contraire; la méridienne est une courbe fermée de forme ovale, et la surface de niveau une sorte de tore déformé tout en restant de révolution.

Les lignes de force, trajectoires orthogonales des surfaces de niveau, sont définies par les équations différentielles

$$\frac{(x^2 + y^2) dx}{x(x^2 + y^2 - a^2)} = \frac{(x^2 + y^2) dy}{y(x^2 + y^2 - a^2)} = \frac{dz}{z}.$$

Les deux premiers rapports donnent d'abord

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

dont l'intégrale est

$$(3) \quad y = \mu x.$$

Il était d'ailleurs évident *a priori*, puisque les surfaces de niveau sont de révolution autour de Oz , que les lignes de force devaient se trouver dans des plans passant par cet axe. Si maintenant on additionne terme à terme les deux premiers rapports, après les avoir multipliés respectivement par x et y , on a

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2 - a^2} = \frac{dz}{z},$$

dont l'intégrale est

$$(4) \quad x^2 + y^2 - a^2 = \nu z^2,$$

équation générale des quadriques de révolution ayant pour équateur, dans le plan Oxy , le cercle

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

3. L'équation différentielle du mouvement de la projection M' du point M sur Oz est, d'après la troisième équation (1),

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -K^2 z,$$

dont, ainsi qu'il est bien connu, l'intégrale est

$$(5) \quad z = A \cos Kt + B \sin Kt,$$

qui définit un mouvement vibratoire simple (question de cours).

4. Le mouvement de la projection m du point M sur Oxy est régi par les deux premières équations (1) qui montrent d'abord que

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y},$$

c'est-à-dire que la force est centrale.

Il en résulte que le mouvement du point m est défini, en coordonnées polaires (r, θ) , par les deux équations

$$(6) \quad \begin{cases} r^2 \frac{d\theta}{dt} = C, \\ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{K^2(a^2 - r^2)}{r}, \end{cases}$$

et, par suite, son mouvement sur le rayon vecteur par

$$(7) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{K^2(a^2 - r^2)}{r}.$$

Pour que le point m décrive le cercle, il faut que,

(275)

placé d'abord sur ce cercle, il soit lancé perpendiculairement au rayon, ce qui donne les conditions initiales

$$r = R, \quad r \frac{d\theta}{dt} = v, \quad \frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où

$$C = Rv,$$

et l'équation (7) devient

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{R^2 v^2}{r^3} = \frac{K^2 (a^2 - r^2)}{r}.$$

Il faut maintenant, et il suffit, que cette équation admette l'intégrale $r = R$, ce qui donne

$$v = K \sqrt{R^2 - a^2},$$

valeur réelle pour $R > a$, dont le signe dépend du sens arbitraire attribué au mouvement.

En résumé : *les conditions initiales nécessaires et suffisantes sont*

$$r = R, \quad v = K \sqrt{R^2 - a^2},$$

la vitesse v étant d'ailleurs perpendiculaire au rayon.

De

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$$

on tire ensuite, par un choix convenable de l'origine des temps,

$$\theta = \frac{v}{R} t,$$

et, par conséquent,

$$(8) \quad \begin{cases} x = R \cos \frac{K \sqrt{R^2 - a^2}}{R} t, \\ y = R \sin \frac{K \sqrt{R^2 - a^2}}{R} t. \end{cases}$$

Le mouvement dans l'espace du point M, défini par les équations (5) et (8), peut dès lors être engendré comme suit : le point M est animé d'un mouvement vibratoire simple sur une parallèle à Oz douée d'un mouvement de rotation uniforme autour de cet axe. Autrement dit : la trajectoire est une courbe cylindrique de Lissajous. Il est bien connu qu'une telle courbe se ferme et, par suite, est algébrique si le rapport des périodes des deux mouvements, ici égal à $\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}$, est rationnel. On peut, au surplus, le démontrer comme suit.

§. Si $\frac{R^2 - a^2}{R^2}$ est le carré d'un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ (p et q étant premiers entre eux, et d'ailleurs $p < q$) et si l'on pose

$$\frac{Kt}{q} = \theta,$$

les coordonnées (5) et (7) du point mobile s'écrivent

$$\begin{aligned} x &= R \cos p\theta, \\ y &= R \sin p\theta, \\ z &= A \cos q\theta + B \sin q\theta. \end{aligned}$$

Or on sait, d'une manière générale, que, si l'on pose $\cos \theta = u$, on a

$$\cos m\theta = f_m(u), \quad \sin m\theta = \sqrt{1 - u^2} \varphi_{m-1}(u),$$

$f_m(u)$ et $\varphi_{m-1}(u)$ étant des polynômes entiers, de degrés respectifs m et $m - 1$ en u . Les coordonnées x , y , z s'expriment donc algébriquement en fonction du paramètre u , et la courbe qu'elles définissent est dès lors algébrique. D'ailleurs, les u des points où cette courbe rencontre un plan quelconque,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

sont donnés par l'équation

$$\alpha R f_p(u) + \beta R \sqrt{1-u^2} \varphi_{p-1}(u) \\ + \gamma A f_q(u) + \gamma B \sqrt{1-u^2} \varphi_{q-1}(u) + \delta = 0,$$

ou

$$[\alpha R f_p(u) + \gamma A f_q(u) + \delta]^2 \\ = (1-u^2) [\beta R \varphi_{p-1}(u) + \gamma B \varphi_{q-1}(u)]^2,$$

dont le degré est égal à $2q$ (puisque $q > p$); tel est donc l'ordre de la trajectoire ainsi obtenue.

En particulier, si $p = q = 1$, la trajectoire est une conique; c'est d'ailleurs la section du cylindre

$$x^2 + y^2 = R^2$$

par le plan

$$z = Ax + By.$$

Et, en effet, si $\frac{R^2 - a^2}{R^2} = 1$, il vient $\dot{a} = 0$; autrement dit, le point Q de l'énoncé se confond constamment avec O, et la force qui sollicite le point M est une force attractive issue de O et proportionnelle à la distance OM. Il est bien connu qu'en pareil cas la trajectoire est une ellipse de centre O.