

JEAN SERVAIS

**Concours d'admission à l'École
polytechnique en 1907. Composition
d'algèbre et de trigonométrie**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 266-270

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__266_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1907.
COMPOSITION D'ALGÈBRE ET DE TRIGONOMETRIE.

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

I. Soient $f(\theta)$ et $\varphi(\theta)$ deux fonctions de la variable indépendante θ , et soient $f'(\theta)$ et $\varphi'(\theta)$ leurs dérivées. On pose

$$x = f(\theta) - \varphi'(\theta), \quad y = \varphi(\theta) + f'(\theta),$$

$$X = f' \sin \theta - \varphi'(\theta) \cos \theta,$$

$$Y = f' \cos \theta + \varphi'(\theta) \sin \theta.$$

Démontrer que l'on a identiquement

$$dx^2 + dy^2 = dX^2 + dY^2.$$

II. Former l'équation du troisième degré qui admet pour racines les longueurs des côtés d'un triangle, connaissant le périmètre $2p$, la somme des trois hauteurs $2h$ et l'aire S du triangle.

APPLICATION NUMÉRIQUE : Calculer les trois côtés en supposant $2p = 16^m$, $2h = 13^m, 60$, $S = 12^m$.

III. On donne quatre quantités a, b, c, d réelles et différentes entre elles. Soit

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

1° Déterminer une fonction $\varphi_1(x)$, polynôme du troisième degré, telle qu'on ait

$$\varphi_1(a) = b, \quad \varphi_1(b) = c, \quad \varphi_1(c) = d, \quad \varphi_1(d) = a.$$

2° Si l'on permute, dans $\varphi_1(x)$, a, b, c, d de toutes les manières possibles, on trouve six fonctions différentes : $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x), \varphi_5(x), \varphi_6(x)$. Soient $F(x)$ la somme de ces six fonctions et

$$G(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^3 F(x) :$$

former la fonction $G(x)$ et étudier la variation de cette fonction.

3° Déterminer les deux intégrales indéfinies

$$\int G(x) dx, \quad \int \frac{dx}{G(x)}.$$

I. La première question est un simple exercice de calcul, sans difficultés, car on a

$$\begin{aligned} dX &= dx \cos \theta + dy \sin \theta, \\ dY &= -dx \sin \theta + dy \cos \theta. \end{aligned}$$

II. Soit

$$f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$$

le polynôme cherché. D'après l'énoncé, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= 2p, \\ S \frac{\beta}{\gamma} &= h, \\ S^2 &= p f(p) = p(p^3 - \alpha p^2 + \beta p - \gamma). \end{aligned}$$

On en tire les valeurs de β et γ :

$$\beta = \frac{(S^2 + p^4)h}{(hp - S)p},$$

$$\gamma = \frac{(S^2 + p^4)S}{(hp - S)p}.$$

Dans l'exemple numérique, les valeurs des coefficients sont

$$\alpha = 16, \quad \beta = 85, \quad \gamma = 150.$$

L'équation

$$x^3 - 16x^2 + 85x - 150 = 0$$

se résout en cherchant ses racines entières, et l'on trouve qu'elle admet pour racines 5, 5 et 6.

Le triangle est donc isoscèle : la base a 6^m et les deux côtés égaux chacun 5^m.

III. 1^o La formule d'interpolation de Lagrange donne de suite

$$\varphi_1(x) = \sum \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} b,$$

les divers termes de Σ se déduisant de celui qui est écrit par permutation circulaire des lettres a, b, c, d .

2^o A chaque permutation des lettres a, b, c, d correspond un polynome ; mais quatre permutations, se déduisant les unes des autres par permutations circulaires des lettres, fournissent le même polynome φ . Il y a donc seulement $\frac{24}{4} = 6$ polynomes distincts, pour lesquels

$$\begin{aligned} \varphi_1(a) = b, & \quad \varphi_2(a) = b, & \quad \varphi_3(a) = c, & \quad \varphi_4(a) = c, \\ \varphi_5(a) = d, & \quad \varphi_6(a) = d. \end{aligned}$$

On a alors

$$F(x) = 2 \sum \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} (b+c+d).$$

Posons

$$f(x) = x^4 - s_1 x^3 + s_2 x^2 - s_3 x + s_4;$$

on a, puisque $b+c+d = s_1 - a$,

$$F(x) = 2F_1(x) - 2F_2(x),$$

avec

$$F_1(x) = \sum \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} s_1,$$

$$F_2(x) = \sum \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} a.$$

On voit ainsi que $F_1(x)$ est le polynome, du troisième degré au plus, qui, pour les quatre valeurs a, b, c, d de x , prend la même valeur s_1 ; on a donc, identiquement,

$$F_1(x) = s_1.$$

De même, $F_2(x)$ est le polynome, du troisième degré au plus, qui, pour les valeurs a, b, c, d de x , prend respectivement les valeurs a, b, c, d ; on a donc évidemment

$$F_2(x) = x.$$

On en conclut

$$F(x) = 2s_1 - 2x$$

et

$$G(x) = s_2 x^2 - s_3 x + s_4.$$

Ce polynome $G(x)$ est minimum pour

$$x = \frac{s_3}{2s_2}.$$

3° On a immédiatement

$$\int G(x) dx = \frac{1}{3}s_2x^3 - \frac{1}{2}s_3x^2 + s_4x + \text{const.}$$

La valeur de l'intégrale $\int \frac{dx}{G(x)}$ dépend de la réalité des racines de $G(x)$.

Si l'on a $s_3^2 - 4s_2s_4 > 0$, désignons par α et β les racines réelles de $G(x)$. On a alors

$$\int \frac{dx}{G(x)} = \frac{1}{s_2(\alpha - \beta)} \log \frac{x - \alpha}{x - \beta} + \text{const.}$$

Si $s_3^2 - 4s_2s_4 < 0$, on a

$$\int \frac{dx}{G(x)} = \frac{2}{\sqrt{4s_2s_4 - s_3^2}} \arctan \frac{2s_2x - s_3}{\sqrt{4s_2s_4 - s_3^2}} + \text{const.}$$

Enfin, si $s_3^2 - 4s_2s_4 = 0$, on a

$$\int \frac{dx}{G(x)} = \frac{2}{s_3 - 2s_2x} + \text{const.}$$

Il est d'ailleurs facile de voir que ces trois cas sont possibles, car, quand les a , b , c , d sont égaux (ou presque égaux), les racines de $G(x)$ sont imaginaires, et, quand $s_2 = 0$, ces racines sont réelles.