

E. MATHY

**Potentiel d'une couronne circulaire
électrique de largeur infiniment mince et
de densité superficielle égale à l'unité**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 257-263

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__257_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[T5a]

POTENTIEL D'UNE COURONNE CIRCULAIRE ÉLECTRIQUE DE
LARGEUR INFINIMENT MINCE ET DE DENSITÉ SUPERFI-
CIELLE ÉGALE À L'UNITÉ;

PAR M. E. MATHY.

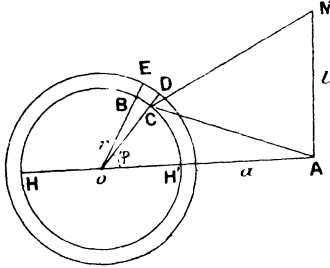
Soient la couronne circulaire de rayon $r = OC$ et de largeur dr , le point M situé en dehors du plan du cercle OC .

De M on abaisse MA perpendiculaire sur le plan de la couronne et l'on joint A au centre du cercle; les longueurs de ces deux droites fixes sont l et a . Dès lors, si l'on trace le secteur d'ouverture infiniment petite

$d\varphi = \text{BOC}$, φ désignant l'angle COA, ce secteur découpera sur la couronne l'élément de surface

$$\text{BCDE} = r d\varphi dr;$$

la distance du point M au centre de gravité de cette



surface peut être prise égale à MC; comme la densité de la couche est 1, la masse comprise sous cet élément sera $r d\varphi dr$; donc, le potentiel élémentaire en M sera

$$\frac{r d\varphi dr}{\text{MC}}.$$

Le potentiel de la couronne sera donc

$$(1) \quad V = 2 \int_0^\pi \frac{r d\varphi dr}{\text{MC}} = 2 \int_0^\pi \frac{r d\varphi dr}{\sqrt{l^2 + a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}}.$$

Or, la couronne étant circulaire, r et dr sont constants :

$$V = 2rdr \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{l^2 + a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}}.$$

Mais on peut écrire :

$$\begin{aligned} V &= 4rdr \int_0^\pi \frac{-d(90^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2 - 4ar \sin^2(90^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}} \\ &= \frac{4rdr}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \end{aligned}$$

lorsque

$$\psi = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{4ar}{l^2 + (a+r)^2}.$$

On reconnaît sous cette forme que

$$(2) \quad V = \frac{4r dr K}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2}}.$$

De ce que k^2 est plus petit que 1, il est possible de calculer V à l'aide des Tables de Legendre: d'ailleurs $\sqrt{l^2 + (a+r)^2}$ n'est autre que la droite MH , H étant l'extrémité du diamètre passant par A .

Composante suivant MA de l'attraction de cette couronne.

On sait que l'attraction suivant MA ou l est donnée par

$$(3) \quad -A = \frac{dV}{dl}.$$

En vertu de (2)

$$-A = \frac{d}{dl} \frac{4r dr K}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2}}.$$

En effectuant, on trouve

$$(4) \quad -A = \frac{-4l r dr K}{[l^2 + (a+r)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{4r dr}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2}} \frac{dK}{dl}.$$

Pour obtenir $\frac{dK}{dl}$, il faut remarquer que K est fonction de son module k^2 , lequel est à son tour fonction

de l ; on aura ainsi

$$(5) \quad \frac{dK}{dl} = \frac{dK}{d(k^2)} \frac{d(k^2)}{dl}.$$

Or $\frac{dK}{d(k^2)}$ est une formule classique

$$\frac{dK}{d(k^2)} = \frac{E}{2k^2(1-k^2)} - \frac{K}{2k^2}.$$

Appliquée au cas particulier de $k^2 = \frac{4ar}{l^2 + (a+r)^2}$, elle donne

$$(6) \quad \frac{dK}{d(k^2)} = \frac{E [l^2 + (a+r)^2]^2}{8ar [d^2 + (a-r)^2]} - \frac{K [l^2 + (a+r)^2]}{8ar}.$$

Comme

$$(7) \quad \frac{d(k^2)}{dl} = \frac{d}{dl} : \frac{4ar}{l^2 + (a+r)^2} = \frac{-8arl}{[l^2 + (a+r)^2]^2},$$

on aura pour (5)

$$(8) \quad \frac{dK}{dl} = \frac{-lE}{[d^2 + (a-r)^2]} + \frac{Kl}{[l^2 + (a+r)^2]}.$$

Enfin, cette expression de $\frac{dK}{dl}$ reportée dans (4) fournira la valeur de $-A$

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} -A &= \frac{-4lrd r K}{[l^2 + (a+r)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{4rl d r E}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2} [l^2 + (a-r)^2]} \\ &\quad + \frac{4lrd r K}{[l^2 + (a+r)^2]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \right.$$

$$(10) \quad A = \frac{4r d r l E}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2} [l^2 + (a-r)^2]}.$$

Le module de E est k^2 ; sa valeur est donnée par les Tables de Legendre comme celle de K ; en outre $[l^2 + (a-r)^2]$ est le carré de la droite MH' .

Calcul direct de A.

Cette valeur de A sera exprimée par

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= 2 \int_0^\pi \frac{r \, d\varphi \, dr}{MC^2} \cos CMA \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{r \, d\varphi \, dr \, l}{(l^2 + a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right.$$

Pour obtenir la valeur de cette intégrale, on se sert des signes de Weierstrass. D'abord A peut se mettre sous la forme

$$(12) \quad A = \frac{2r \, dr \, l}{(l^2 + a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{2ar}{l^2 + a^2 + r^2} \cos \varphi\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On pose

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2ar}{l^2 + a^2 + r^2} &= h, \\ \cos \varphi &= u; \end{aligned} \right.$$

d'où

$$d\varphi = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}};$$

les limites 0 et π de φ correspondent pour u aux limites 1 et -1 . Avec ces nouvelles quantités, on aura successivement

$$(14) \quad A = \frac{2r \, dr \, l}{(l^2 + a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1-hu) \sqrt{(u^2-1)(hu-1)}},$$

$$(14) \quad A = \frac{2r \, dr \, l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}} \int_{+1}^{-1} \frac{du}{\left(u - \frac{1}{h}\right) \sqrt{(u^2-1) \left(u - \frac{1}{h}\right)}}.$$

Les racines du polynome sous le radical étant $\frac{1}{h}$,

1, — 1; afin d'annuler le coefficient du second terme, on pose

$$(15) \quad u = p\nu + \frac{1}{3h}.$$

Il en résulte que les racines sont

$$(16) \quad e_1 = \frac{2}{3h}, \quad e_2 = 1 - \frac{1}{3h}, \quad e_3 = -1 - \frac{1}{3h};$$

et les limites de l'intégration deviennent e_2 et e_3 .

Dès lors (14) prend la forme

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{2r dr l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}} \int_{e_2}^{e_3} \frac{p'v dv}{(p\nu - e_1) \sqrt{(p\nu - e_1)(p\nu - e_2)(p\nu - e_3)}} \\ &= \frac{4r dr l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}} \int_{e_3}^{e_2} \frac{dv}{p\nu - e_1}. \end{aligned} \right.$$

Or, de la formule

$$p(\nu + \omega_1) - e_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p\nu - e_1},$$

on conclut

$$A = \frac{4r dr l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \int_{e_3}^{e_2} [p(\nu + \omega_1) - e_1] dv,$$

$$A = \frac{-4r dr l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} [(u + \omega_1) + e_1\nu]_{e_3}^{e_2},$$

$$A = \frac{-4r dr l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} [\tau_1 + e_1\omega].$$

Enfin, de ce que

$$(18) \quad \begin{aligned} \tau_1 + e_1\omega &= E\sqrt{e_1 - e_3}, \\ A &= \frac{-4r dr l E}{(2ar)^{\frac{3}{2}}(e_1 - e_2)\sqrt{e_1 - e_3}}. \end{aligned}$$

Des formules (16) on déduit

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{4ar}{l^2 + (a + r)^2},$$

$$e_1 - e_3 = \frac{l^2 + (a + r)^2}{2ar}, \quad e_1 - e_2 = \frac{l^2 + (a - r)^2}{2ar};$$

d'où

$$(19) \quad A = \frac{-4r dr l E}{\sqrt{l^2 + (a + r)^2} [l^2 + (a - r)^2]}.$$

Le signe — indiquant une répulsion, les expressions (19) et (10) concordent.