

J. HAAG

Étude du tore rapporté aux cercles d'Yvon Villarceau

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 115-130

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__115_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M²iô]

**ÉTUDE DU TORE RAPPORTÉ AUX CERCLES
D'YVON VILLARCEAU ;**

PAR M. J. HAAG.

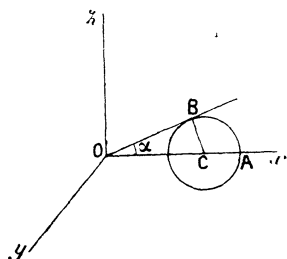
On sait que tout plan bitangent à un tore le coupe suivant deux cercles. Quand ce plan tourne autour de l'axe de révolution, les deux cercles en question engendrent chacun une famille de cercles. Nous nous

proposons d'étudier le tore en prenant ces cercles comme courbes coordonnées.

Calcul des coordonnées d'un point quelconque.

— Prenons pour axe des z l'axe de révolution et pour axes des x et des y deux diamètres rectangulaires de

Fig. 1.



l'équateur. Soit $OC = a$ la distance à l'axe du centre du cercle générateur. Soit α l'angle COB , que nous supposons positif et plus petit que $\frac{\pi}{2}$. (Nous n'étudierons évidemment que les tores à points coniques imaginaires.) Le rayon $CB = R$ du cercle générateur est égal à $a \sin \alpha$.

Ceci étant, le plan yOB coupe le tore suivant deux cercles de rayon commun a et dont les centres sont sur Oy et ont pour ordonnée : le premier $+R$, le second $-R$, comme on le vérifie sans difficulté. Supposons qu'on fasse tourner le premier d'un angle u' autour de Oz et le second d'un angle v' . On obtiendra deux nouveaux cercles (u) et (v) dont les équations seront respectivement

$$(u) \quad \begin{cases} x \cos u' + y \sin u' - z \cot \alpha = 0, \\ (x + R \sin u')^2 + (y - R \cos u')^2 + z^2 = a^2, \end{cases}$$

et

$$(v) \quad \begin{cases} x \cos v' + y \sin v' - z \cot \alpha = 0, \\ (x - R \sin v')^2 + (y + R \cos v')^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

On trouve, par un calcul facile, que ces quatre équations sont compatibles et admettent les deux solutions suivantes, où nous avons posé, pour simplifier, $u' = 2u$, $v' = 2v$:

$$\begin{aligned} x &= a \cos^2 \alpha \frac{\cos(u+v)}{1 \pm \sin \alpha \sin(u-v)}, \\ y &= a \cos^2 \alpha \frac{\sin(u+v)}{1 \pm \sin \alpha \sin(u-v)}, \\ z &= R \cos \alpha \frac{\cos(u-v)}{1 \pm \sin \alpha \sin(u-v)}. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que les deux points ainsi obtenus se déduisent l'un de l'autre par une inversion de centre O et de puissance $a^2 \cos^2 \alpha$. On peut d'ailleurs se borner à prendre le signe + par exemple dans les formules précédentes, comme on le voit, en échangeant les valeurs de u et v . Nous obtenons alors les formules suivantes :

$$(I) \quad \begin{cases} x = a \cos^2 \alpha \frac{\cos(u+v)}{1 + \sin \alpha \sin(u-v)}, \\ y = a \cos^2 \alpha \frac{\sin(u+v)}{1 + \sin \alpha \sin(u-v)}, \\ z = R \cos \alpha \frac{\cos(u-v)}{1 + \sin \alpha \sin(u-v)}, \end{cases}$$

qui peuvent encore s'écrire, en posant $u+v = \theta$ et $u-v = t$,

$$(II) \quad \begin{cases} x = a \cos^2 \alpha \frac{\cos \theta}{1 + \sin \alpha \sin t}, \\ y = a \cos^2 \alpha \frac{\sin \theta}{1 + \sin \alpha \sin t}, \\ z = R \cos \alpha \frac{\cos t}{1 + \sin \alpha \sin t}. \end{cases}$$

Ces formules (II) montrent que θ est l'angle du plan zOx avec le plan zOM . Quant à l'angle t , on peut en donner des interprétations géométriques directes plus ou moins simples, mais dont aucune ne nous a paru intéressante. En tous cas, les courbes $\theta = \text{const.}$ sont les méridiens et les courbes $t = \text{const.}$ sont les parallèles.

Sphère contenant les deux cercles (u) et (v). — On trouve, par un calcul simple, que cette sphère a pour équation

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2a}{\sin t} \\ \times (x \sin \alpha \cos t + y \sin \alpha \sin t - z \cos \alpha \cos t) - a^2 \cos^2 \alpha = 0. \end{array} \right.$$

Elle est tangente au tore aux deux points (θ, t) et $(\theta, -t)$, d'après ce qui a été vu plus haut. Remarquons en passant que ces deux points étant inverses l'un de l'autre, ainsi que nous l'avons déjà dit, pour avoir l'inverse d'une courbe donnée par son équation en (t, θ) , il suffit de changer t en $-t$ dans cette équation. Si l'équation ne change pas, on aura une courbe anallagmatique par rapport à l'origine.

L'équation (1) nous permet d'avoir simplement l'équation du plan tangent au tore au point (θ, t) . Il suffit de prendre le plan tangent en ce point à la sphère. On obtient ainsi

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (\sin \alpha + \sin t)(X \cos \theta + Y \sin \theta) - Z \cos \alpha \cos t \\ - a \cos^2 \alpha \sin t = 0. \end{array} \right.$$

Correspondance entre les points du tore et les droites du plan des xy . — Soit U le point déduit du centre du cercle (u) en le faisant tourner de $-\frac{\pi}{2}$ dans

le plan des xy . Soit de même V le point déduit du centre du cercle (ν) par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$. Les coordonnées de U sont $(R \cos 2u, R \sin 2u, 0)$ et celles de V sont $(R \cos 2\nu, R \sin 2\nu, 0)$. Nous allons faire correspondre au point $M(u, \nu)$ la droite D , obtenue en joignant les deux points U et V . Cette droite a pour équation, comme on le vérifie aisément,

$$(D) \quad x \cos \theta + y \sin \theta - R \cos t = 0.$$

Nous allons établir immédiatement une propriété de la correspondance ainsi établie.

THÉORÈME. — *Le plan mené par O perpendiculaire à OM coupe un plan fixe perpendiculaire à Oz suivant une droite qui se projette suivant la droite D sur le plan des xy .*

En effet, l'équation du plan perpendiculaire à OM mené par O est visiblement

$$x \cos \theta + y \sin \theta + z \frac{R \cos t}{a \cos \alpha} = 0.$$

Or, si dans ce plan on fait $z = -a \cos \alpha$, on retombe sur l'équation (D) . Donc le théorème est démontré et le plan fixe en question a pour équation $z = -a \cos \alpha$. C'est le plan parallèle à xOy , au-dessous de ce plan et à une distance égale à la tangente OB . Nous l'appellerons dans la suite *le plan* (Π) .

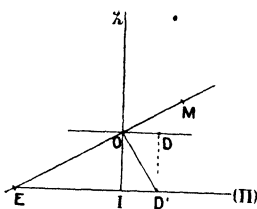
Du théorème précédent, nous allons tirer la conséquence suivante :

THÉORÈME. — *Si la droite D enveloppe une courbe S , le point M décrit une courbe située sur un cône de sommet O et dont la base dans le plan (Π) est polaire réciproque de la projection de*

S sur le même plan, par rapport à un cercle fixe Γ de ce plan.

Prenons en effet pour plan de figure le plan zOM .

Fig. 2..



Désignons par (Π) et D les traces du plan (Π) et de la droite D . Soient E la trace de OM sur (Π) et I la trace de Oz . On a évidemment

$$\overline{ID'} \cdot \overline{IE} = -\overline{OI}^2 = -a^2 \cos^2 \alpha.$$

Ceci suffit pour montrer que E décrit la polaire réciproque de l'enveloppe de la droite D' , projection de D sur (Π) ; le cercle directeur ayant pour centre I et un rayon imaginaire égal à $ia \cos \alpha$. Si l'on voulait un cercle directeur réel, il suffirait de remplacer le plan (Π) par son symétrique par rapport au plan des xy .

Il résulte de ce théorème une manière très simple de se rendre compte de la forme d'une courbe du tore donnée par son équation en t et θ . En mettant cette équation sous la forme $R \cos t = f(\theta)$, on aura l'équation de la droite D sous la forme canonique. On cherchera ensuite la polaire réciproque de l'enveloppe de cette droite, ce qui se fera immédiatement en passant en coordonnées polaires, et l'on aura une perspective de la courbe du tore. Il est bien évident, d'ailleurs, que la droite D joue ici un rôle accessoire; mais il

peut se faire cependant que sa définition simple permette de trouver immédiatement dans certains cas la courbe S, comme nous en verrons un exemple.

Élément linéaire. — Si l'on appelle r le rayon d'un parallèle, on a

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\theta^2.$$

Or,

$$r = \frac{a \cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha \sin t}$$

et

$$z = R \cos \alpha \frac{\cos t}{1 + \sin \alpha \sin t}.$$

On en déduit aisément

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha \sin t)^2} (\cos^2 \alpha d\theta^2 + \sin^2 \alpha dt^2) \\ &= \left[\frac{a^2 \cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha \sin(u - v)} \right]^2 (du^2 + dv^2 + 2 du dv \cos 2\alpha). \end{aligned}$$

Cette formule montre qu'on peut faire une carte du tore de façon à faire correspondre aux cercles de Villarceau deux séries de droites parallèles. Il suffira par exemple de prendre deux axes de coordonnées OX et OY se coupant sous l'angle 2α , et de poser $X = u$ et $Y = v$. Les cercles u auront pour images des parallèles à OY et les cercles v des parallèles à OX. On en déduit immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Deux cercles de Villarceau de familles différentes se coupent sous un angle constant égal à 2α ⁽¹⁾.*

(¹) Ceci peut s'établir géométriquement en faisant une inversion de centre situé à l'intersection de Oz avec la sphère contenant les deux cercles en question et en considérant ensuite deux cercles symétriques par rapport au plan des xy

Dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{4}$, les cercles de Villarceau forment un réseau orthogonal et isotherme.

De ce qui précède résulte immédiatement *l'équation générale des loxodromies* du tore. Cette équation est de la forme

$$Au + Bv + C = 0,$$

A, B, C désignant des constantes quelconques. Si l'on appelle V l'angle d'une telle courbe avec le cercle (u)⁽¹⁾, on a d'ailleurs

$$\text{tang } V = \frac{A \sin 2\alpha}{B - A \cos 2\alpha},$$

et l'équation précédente devient

$$u \sin V + v \sin(2\alpha + V) + C = 0.$$

Il est facile de voir ce que sont ces loxodromies en passant par l'intermédiaire des droites (D). Ces droites coupent en effet le cercle (γ) de centre O et de rayon R en des points U et V d'angles polaires $2u$ et $2v$. Or on sait que, s'il existe une relation linéaire quelconque entre ces angles polaires, la droite UV enveloppe une hypocycloïde ou une épicycloïde. Si l'on appelle d'ailleurs m le rapport du rayon du cercle base au rayon du cercle roulette, ce rapport étant positif pour une épicycloïde et négatif pour une hypocycloïde, on a

$$m = -\frac{A+B}{B} = -\frac{2 \cos \alpha \sin(\alpha + V)}{\sin(2\alpha + V)},$$

(¹) Cet angle est compté positivement dans le sens dans lequel il faut faire tourner la tangente au cercle (u) de l'angle 2α pour l'amener sur la tangente au cercle (v).

d'où l'on tire inversement

$$\operatorname{tang}(\alpha + V) = -\frac{m}{m+2} \operatorname{tang} \alpha \text{ (}^1\text{)}.$$

Enfin le cercle (γ) est, comme on sait, le cercle sur lequel roule en glissant le cercle roulette. L'enveloppe de (D) est ainsi parfaitement définie pour une valeur donnée de V , à une rotation près autour de Oz . Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les loxodromies du tore sont toutes sur des cônes ayant pour bases des polaires réciproques d'hypocycloïdes ou d'épicycloïdes.*

Comme vérifications, on trouve $m=0$ pour $V=-\alpha$, ce qui donne les droites D tangentes à γ et par suite les parallèles sur le tore, comme il est facile de le voir.

Pour $V = \pm \frac{\pi}{2} - \alpha$, on trouve $m = -2$, ce qui donne des droites D parallèles et, par suite, des méridiens sur le tore. Pour $V = 0$, on a $m = -1$, ce qui donne des droites D pour lesquelles le point U est fixe et, par suite, les cercles (u) . De même, pour $V = -2\alpha$, $m = \infty$; on retrouve les cercles (v) .

Courbure géodésique des cercles de Villarceau.

— La forme simple de l'élément linéaire donne l'idée de calculer la courbure géodésique des courbes

$$u = \text{const.} \quad \text{et} \quad v = \text{const.}$$

On trouve, en appliquant une formule connue,

$$\varrho_g = \frac{a}{\cos(u-v)} = \frac{a}{\cos t}.$$

(¹) Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on a $\operatorname{tang} V = -(m+1)$.

D'autre part, si l'on appelle ω l'angle du plan tangent au tore avec le plan du cercle considéré, on a, en se rappelant que le rayon d'un cercle de Villarceau est égal à a ,

$$\rho_g = \frac{a}{\cos \omega}.$$

D'où

$$\cos \omega = \cos t,$$

ou

$$\omega = t.$$

D'où le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'angle du plan tangent en un point avec le plan de chacun des deux cercles qui y passent est égal au double de l'angle des plans méridiens perpendiculaires aux plans des deux cercles.*

Lignes asymptotiques du tore. — Le théorème précédent nous permet de calculer immédiatement la courbure normale de la surface en un point $M(u, v)$ dans les directions $du = 0$ ou $dv = 0$. On trouve sans difficulté

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\sin t}{a}$$

en prenant comme sens positif sur la normale celui qui va de M au centre du cercle générateur. D'autre part, si φ désigne l'angle de la tangente au parallèle de M avec la tangente à une courbe quelconque passant par M , on a, d'après la formule d'Euler,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R} \sin^2 \varphi.$$

En faisant $\varphi = \alpha$, on doit trouver

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\sin t}{a},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{R_1} = - \frac{1}{a \cos^2 \alpha} (\sin \alpha + \sin t).$$

La formule d'Euler devient alors

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \sin^2 \varphi - \frac{1}{a \cos^2 \alpha} (\sin \alpha + \sin t) \cos^2 \varphi.$$

Pour une ligne asymptotique, on a donc

$$\frac{1}{\sin \alpha} \sin^2 \varphi - \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\sin \alpha + \sin t) \cos^2 \varphi = 0.$$

D'autre part, on a aisément

$$(3) \quad \tan \varphi = \tan \alpha \frac{dt}{d\theta}.$$

D'où l'équation des lignes asymptotiques

$$(4) \quad \frac{dt^2}{d\theta^2} = 1 + \frac{\sin t}{\sin \alpha}.$$

Cette équation peut être obtenue directement en partant des coordonnées homogènes d'un point ou d'un plan tangent quelconque du tore et appliquant la formule connue. Mais on a des calculs plus compliqués que par la méthode précédente.

Cette équation s'écrit

$$d\theta = \frac{\pm dt}{\sqrt{1 + \frac{\sin t}{\sin \alpha}}}.$$

Elle s'intègre par les fonctions elliptiques. On trouve aisément l'équation suivante

$$(5) \quad \operatorname{dn} \xi \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) = \pm \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right),$$

où l'on a posé

$$\xi = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{2 \sin \alpha}}$$

et où le module de la fonction $\operatorname{dn} \xi$ est

$$k = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

On arrive, comme on voit, à une équation très simple, qui permet de se rendre compte immédiatement de la forme de la courbe. En prenant, par exemple, $\theta_0 = 0$ et prenant le signe $+$ dans l'équation (5), on a la ligne asymptotique qui passe par le point le plus haut de la méridienne de droite du plan des zx . En tenant compte de la formule (4), qui peut maintenant s'écrire

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \alpha \sqrt{1 + \frac{\sin t}{\sin \alpha}},$$

on a en chaque point l'angle φ de la tangente à la courbe avec le parallèle, ce qui permet d'étudier très exactement la forme de la courbe. On voit ainsi qu'elle part tangentielllement au parallèle supérieur, coupe le parallèle engendré par B sous l'angle α , puis arrive à l'équateur, pour $\theta = \theta_2$, avec

$$\theta_2 = \sqrt{\sin \alpha} \int_{-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\sin \alpha + \sin t}}.$$

Pour avoir le reste de la courbe, il suffit de faire une symétrie par rapport au rayon passant par le point $(\theta_2, \frac{\pi}{2})$, puis par rapport à tous les plans définis par l'angle $\theta = 2k\theta_2$. La courbe est tangente au parallèle supérieur aux points $\theta = 4k\theta_2$, et au parallèle

inférieur aux points $\theta = (4k + 2)\theta_2$. La courbe ne se fermera que si θ_2 est commensurable avec π .

Mouvement d'un point qui décrirait une asymptotique. — La forme de cette courbe, qui ressemble à celle d'un mouvement pendulaire, conduit à penser qu'elle sera décrite par un mobile soumis à une loi de forces simple. On trouve, en effet, sans difficulté, le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si un mobile glissant sans frottement sur la surface du tore est attiré par l'axe suivant la force $\frac{\lambda}{r^2}$, le mobile décrira une asymptotique, pourvu que la vitesse initiale satisfasse aux deux conditions suivantes :*

$$\theta_0'^2 r_0^2 = \frac{2\lambda}{3am} \quad \text{et} \quad v_0^2 = \frac{2\lambda}{3mr_0^2}.$$

λ désigne une constante arbitraire et m la masse du mobile; r est sa distance à l'axe. On peut remarquer que pour une même loi de forces la vitesse initiale ne dépend pas du tore; elle ne dépend que de la distance initiale du mobile à l'axe. La constante des aires ne dépend pas, au contraire, de cette distance initiale; elle ne dépend que de la distance a du centre du cercle générateur à l'axe.

Longueur d'un arc d'asymptotique. — Il suffit de remplacer dans l'élément linéaire de la surface $d\theta$ par sa valeur en fonction de t et dt . On trouve alors qu'en posant

$$\sigma = \frac{s}{a} \sqrt{\frac{2}{\sin \alpha}}$$

et prenant l'origine des arcs sur le parallèle du point B,

on a

$$\operatorname{cn} \sigma = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right),$$

le module de $\operatorname{cn} \sigma$ étant d'ailleurs $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Géodésiques du tore. — Elles nous sont données par la formule de Clairaut :

$$r \sin i = B \quad (B = \text{const.}).$$

On en déduit aisément l'équation suivante, où nous avons posé $B = R \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} A$,

$$d\theta = \frac{A \operatorname{tang} \alpha (1 + \sin \alpha \sin t) dt}{\sqrt{1 - A^2 (1 + \sin \alpha \sin t)^2}},$$

qui s'intègre encore par les fonctions elliptiques. Indiquons simplement les résultats.

Premier cas : $A < \frac{1}{1 + \sin \alpha}$. — Si λ désigne un paramètre variable, les équations paramétriques de la géodésique qui correspond, à une rotation près, à une valeur donnée de A , sont

$$1 + \sin \alpha \sin t = -\frac{1}{A} + \left[\left(1 + \frac{1}{A} \right)^2 - \sin^2 \alpha \right] \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \lambda - \frac{1 + \sin \alpha + \frac{1}{A}}{2 \sin \alpha}},$$

$$\frac{\theta}{\operatorname{tang} \alpha} = -\frac{\lambda}{A g} + \frac{\left(1 + \frac{1}{A} \right)^2 - \sin^2 \alpha}{g} \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\operatorname{sn}^2 \lambda - h^2}$$

$$= -\frac{\lambda}{A g} + \frac{\left(1 + \frac{1}{A} \right)^2 - \sin^2 \alpha}{g} \left[\lambda \left(\frac{\zeta b}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}' b} - \frac{1}{h^2} \right) + \frac{\log \frac{\sigma(b - \lambda)}{\sigma(b + \lambda)}}{2 \operatorname{sn} b \operatorname{sn}' b} \right]$$

avec

$$g = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{A} + \sin \alpha\right)^2 - 1}, \quad h^2 = \frac{1 - \sin \alpha + \frac{1}{A}}{2 \sin \alpha},$$

$$\operatorname{sn} b = h.$$

Les fonctions ζ et σ introduites dans le crochet sont les fonctions bien connues relatives à la fonction $\operatorname{sn} \lambda$ qui entre dans ces équations et dont le module est

$$k = 2 \sqrt{\frac{\sin \alpha}{A \left[\left(\frac{1}{A} + \sin \alpha\right)^2 - 1 \right]}}.$$

Second cas : $A > \frac{1}{1 + \sin \alpha}$. — On a alors les équations suivantes :

$$1 + \sin \alpha \sin t = -\frac{1}{A} + \frac{2}{A} \left(\frac{1}{A} + 1 - \sin \alpha \right) \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \lambda - h'^2},$$

$$\frac{t}{\tan \alpha} = -\frac{1}{A g'} \lambda + \frac{2 \left(\frac{1}{A} + 1 - \sin \alpha \right)}{\sqrt{A \sin \alpha}} \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\operatorname{sn}^2 \lambda - h'^2}$$

$$= -\frac{1}{A} \sqrt{\frac{A}{\sin \alpha}} \lambda + \frac{2 \left(\frac{1}{A} + 1 - \sin \alpha \right)}{\sqrt{A \sin \alpha}} \left[\lambda \left(\frac{\zeta b'}{\operatorname{sn} b' \operatorname{sn}' b'} - \frac{1}{h'^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2 \operatorname{sn} b' \operatorname{sn}' b'} \log \frac{\sigma(b' - \lambda)}{\sigma(b' + \lambda)} \right]$$

avec

$$g' = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{A}}, \quad h^2 = \frac{2}{A(\sin \alpha - 1) + 1},$$

$$\operatorname{sn} b' = h', \quad k = \frac{1}{h}.$$

Cas intermédiaire : $A = \frac{1}{1 + \sin \alpha}$. — Il y a alors dégénérescence. On trouve, dans ce cas, les équations

(130)

suivantes, où φ désigne un paramètre variable :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) = \pm \frac{\operatorname{sh} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\varphi_0}{2}},$$

$$\theta = \varphi \tan \alpha + \frac{\tan \alpha}{2} \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha}} \log \frac{\operatorname{sh} \frac{\varphi_0 - \varphi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\varphi_0 + \varphi}{2}},$$

en posant

$$\operatorname{sh} \frac{\varphi_0}{2} = \sqrt{\sin \alpha}.$$