

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 90-96

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6_90_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6_90_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1652.

(1893, p. 2*.)

Trouver tous les systèmes de quatre nombres positifs a , b , c , d , tels que les dix nombres

$$\begin{aligned} a + b - 1, \quad a + c - 1, \quad a + d - 1, \\ b + c - 1, \quad b + d - 1, \quad c + d - 1, \\ 2 - b - c - d, \quad 2 - c - d - a, \\ 2 - d - a - b, \quad 2 - a - b - c \end{aligned}$$

soient les inverses de nombres entiers.

(LEVAVASSEUR.)

SOLUTION

Par M. A. DELTOUR.

On se trouve en présence du système d'équations

$$(1) \quad \begin{cases} a + b - 1 = x, & c + d - 1 = x_1, & 2 - b - c - d = m, \\ a + c - 1 = y, & b + d - 1 = y_1, & 2 - a - c - d = n, \\ a + d - 1 = z, & b + c - 1 = z_1, & 2 - a - b - d = p, \\ & & 2 - a - b - c = q, \end{cases}$$

dans lesquelles les seconds membres sont de la forme $\frac{1}{N}$,
N étant entier.

Posant

$$(2) \quad a + b + c + d - 2 = \alpha,$$

on a

$$(3) \quad \begin{cases} a = m + \alpha, & c = p + \alpha, \\ b = n + \alpha, & d = q + \alpha, \end{cases}$$

$$(4) \quad m + n + p + q - 2 = -3\alpha.$$

L'élimination de a, b, c, d donne les six relations suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} x + p + q = x_1 + m + n, \\ = y + n + q = y_1 + m + p, \\ = z + n + p = z_1 + m + q = 1 - \alpha. \end{cases}$$

On a encore les formules suivantes :

$$(6) \quad x + x_1 = y + y_1 = z + z_1 = \alpha$$

et

$$(7) \quad \begin{cases} x + p = y + n = z_1 + m = (1 - \alpha) - q, \\ x + q = y_1 + m = z + n = (1 - \alpha) - p, \\ x_1 + m = y + q = z + p = (1 - \alpha) - n, \\ x_1 + n = y_1 + p = z_1 + q = (1 - \alpha) - m. \end{cases}$$

Si dans (5) on remplace α par l'une des valeurs tirées de (6), on a six formules ne renfermant chacune que quatre inconnues de la forme $\frac{1}{N}$:

$$(8) \quad \begin{cases} 2x + x_1 + p + q = 1, \\ 2x_1 + x + m + n = 1, \\ 2y + y_1 + n + q = 1, \\ 2y_1 + y + m + p = 1, \\ 2z + z_1 + n + p = 1, \\ 2z_1 + z + m + q = 1. \end{cases}$$

La combinaison de chaque ligne des relations (7) avec (4) donne encore quatre relations analogues :

$$(9) \quad \begin{cases} x + y + z_1 + 2q = 1, \\ x + y_1 + z + 2p = 1, \\ x_1 + y + z + 2n = 1, \\ x_1 + y_1 + z_1 + 2m = 1. \end{cases}$$

On peut enfin remarquer que la somme des dix inconnues est égale à 2 :

$$\Sigma x + \Sigma m = 2.$$

Les équations (8) forment ensemble le système des conditions à remplir.

Elles n'ont plus de solution lorsque chacune des inconnues est inférieure en valeur absolue à $\frac{1}{5}$.

Il en résulte un moyen de résoudre le système en donnant successivement à chaque inconnue les dix valeurs positives ou négatives $\frac{1}{N}$ pour lesquelles $[N] \leq 5$ et en recherchant dans chaque cas toutes les solutions possibles pour les autres inconnues.

Par raison de symétrie, il suffit d'opérer sur les deux inconnues m et x .

On peut rendre cette discussion plus facile en examinant séparément les cas suivants :

- 1° a, b, c, d ont des valeurs différentes;
- 2° Deux d'entre elles seulement sont égales : $a = b$;
- 3° $a = b, c = d$, a et c ayant des valeurs différentes;
- 4° $a = b = c \neq d$;
- 5° $a = b = c = d$.

1° a, b, c, d ont des valeurs différentes. — Il en est de même de m, n, p, q [formule (3)]. Dans le groupe des inconnues x , toutes les valeurs sont aussi différentes, mais il peut y avoir exception pour un seul des couples $(x, x_1), (y, y_1)$ ou (z, z_1) .

Cela résulte des formules (6) et (7).

2° $a = b$. — Comme conséquence des formules (3) et (7), on a

$$m = n, \quad y = z_1, \quad y_1 = z,$$

et les formules (8) se réduisent à

$$2x + x_1 + p + q = 1,$$

$$2x_1 + x + 2m = 1,$$

$$2y + y_1 + m + q = 1,$$

$$2y_1 + y + m + p = 1.$$

Dans ce cas, la symétrie n'est plus conservée et il ne suffit plus d'opérer sur les inconnues m et x . Mais la seconde des

équations ne contient plus que trois inconnues et c'est celle qu'on doit chercher à résoudre par la méthode indiquée en rejetant les solutions incompatibles avec les trois autres équations.

3° $a = b, c = d$. — On a

$$m = n, \quad p = q, \quad y = y_1 = z = z_1;$$

les formules (8) deviennent

$$2x + x_1 + 2p = 1,$$

$$2x_1 + x + 2m = 1,$$

$$3y + m + p = 1.$$

4° $a = b = c \neq d$. — On a

$$m = n = p \neq q,$$

$$x = y = z_1,$$

$$x_1 = y_1 = z;$$

les formules (8) deviennent

$$2x + x_1 + m + q = 1,$$

$$2x_1 + x + 2m = 1.$$

5° $a = b = c = d$. — On a

$$m = n = p = q, \quad x = x_1 = y = y_1 = z = z_1.$$

Il ne reste qu'une seule condition à remplir :

$$3x + 2m = 1.$$

On obtient ainsi les solutions suivantes, D étant le dénominateur commun aux quatre fractions a, b, c, d dont les numérateurs figurent sous chacune de ces quatre lettres :

I.

D.	$a.$	$b.$	$c.$	$d.$
6	1	2	3	6

II.

D.	$a = b.$	$c.$	$d.$	D.	$a = b.$	$c.$	$d.$
4	1	2	4	12	7	4	9
4	4	1	2	12	9	4	7
6	6	1	2	12	5	8	10
6	6	2	3	12	8	5	10
6	6	1	3	12	7	6	9
6	2	5	7	12	7	6	8
8	5	2	7	12	8	6	7
10	6	3	9	15	9	7	11
12	9	2	7	18	10	7	17
12	7	4	11	20	15	6	9
12	9	4	5	24	15	10	17

III.

D.	$a = b.$	$c = d.$	D.	$a = b.$	$c = d.$
3	1	3	12	5	8
4	1	4	12	7	9
8	3	6	12	7	8

IV.

D,	$a = b = c.$	$d.$	D.	$a = b = c.$	$d.$
3	1	5	12	9	5
3	1	3	12	9	4
4	3	0	12	9	2
6	2	7	12	7	6
6	2	5	12	7	9
8	5	2	12	7	8
8	5	7	15	9	7
8	6	3	15	9	11
8	5	4	18	10	7
9	5	7	18	10	17
10	6	3	20	15	9
10	6	9	20	15	6
12	7	4	24	15	10
12	9	7	24	15	17
12	7	11			

V.

D.	$a = b = c = d.$		D.	$a = b = c = d.$
3	1		8	5
4	3		9	5
5	3		12	7

Il faut enfin ajouter une solution, dépendant d'un entier arbitraire :

D	$a = b = c.$	$d.$
k	k	1

(k entier positif quelconque).

Cette solution rentre, en général, dans le quatrième cas, et exceptionnellement dans le cinquième (pour $k = 1$).

Le problème proposé admet en tout

$$1 + 22 + 6 + 29 + 6 + 1 = 65 \text{ solutions.}$$

2022.

(1905, p. 480.)

Soient a, b, c trois coefficients consécutifs quelconques d'une équation algébrique à coefficients réels, dont toutes les racines sont réelles; on demande de démontrer qu'il est impossible d'avoir

$$b^2(2b^2 - 3ac)^2 < a^3(4c^3 - 3ab^2).$$

(SOLON CHASSIOTIS.)

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Soit d le coefficient qui vient après c . On a, d'après un théorème de Catalan,

$$(1) \quad (ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) < 0$$

ou, en ordonnant par rapport à d ,

$$(2) \quad a^2d^2 + 2b(2b^2 - 3ac)d + a(4c^3 - 3ab^2) < 0.$$

Par hypothèse, les coefficients de l'équation proposée sont réels; le premier membre de l'inégalité (2) a donc des solu-

tions réelles en d et jamais d'imaginaires, donc il est impossible que l'on ait

$$b^2(2b^2 - 3ac)^2 - a^3(4c^3 - 3ab^2) < 0$$

ou

$$b^2(2b^2 - 3ac)^2 < a^3(4c^3 - 3ab^2). \quad \text{C. Q. F. D.}$$