

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 567-575

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__567_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1967.

(1903, p. 144.)

Soient AIB une corde d'un cercle, AJB un des arcs sous-tendus, I et J étant les points milieux; M étant un point quelconque de la corde AB, élevons par ce point une perpendiculaire sur cette corde; elle va rencontrer une des cordes AJ ou JB en un point M_1 , AJ si $\frac{AM}{AB} < \frac{1}{2}$, et JB si $\frac{AM}{AB} > \frac{1}{2}$. Procédant sur la corde qui comprend M,

comme tantôt sur AB et M , on obtient un point M_2 . On obtient ainsi une suite de points $M_1, M_2, \dots, M_n$ qui ont pour limite un point de l'arc AJB , le partageant dans le rapport $\frac{AM}{AB}$. On demande les coordonnées du point M_n .

A. PELLET.

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Supposons $\frac{AM}{AB} < \frac{1}{2}$; O étant le centre du cercle, prenons pour axe des x le diamètre OA , pour axe des y le diamètre perpendiculaire, et soit $\alpha = \text{arc } AJB$. Nous définirons un point quelconque C de la circonférence par l'angle de OC avec Ox .

Le rapport $\gamma = \frac{AM}{AB}$ peut se mettre sous la forme

$$\lambda = \frac{1}{2^{n_1}} - \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{n_1+n_2+\dots+n_k}} + \dots,$$

où $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ sont des entiers égaux ou supérieurs à 1, et, pour la commodité de l'écriture, posons

$$\lambda_k = \frac{1}{2^{s_1}} - \frac{1}{2^{s_2}} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{s_k}}$$

avec]

$$s_k = n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Les s_1 premiers points $M_1, M_2, \dots, M_{s_1}$ sont sur les droites

$$AJ, AJ_1, \dots, AJ_{s_1-1},$$

issues de A ; les rapports

$$\frac{AM_1}{AJ}, \frac{AM_2}{AJ_1}, \dots, \frac{AM_{s_1}}{AJ_{s_1-1}}$$

sont égaux respectivement à

$$1 - 2\lambda, 1 - 2^2\lambda, \dots, 1 - 2^{s_1}\lambda,$$

tous inférieurs à $\frac{1}{2}$, sauf le dernier, et les points $J, J_1, \dots$,

J_{s_1-1} sont définis par les angles

$$\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\alpha}{2^2}, \quad \dots, \quad \frac{\alpha}{2^{s_1}}.$$

Les n_2 points suivants M_{s_1+1} , M_{s_1+2} , ..., M_{s_2} sont sur les droites $J_{s_1-1}J_{s_1}$, $J_{s_1-1}J_{s_1+1}$, ..., $J_{s_1-1}J_{s_2-1}$ issues de J_{s_1-1} ;

les rapports analogues à $\frac{AM}{AB}$ sont

$$2^{s_1+1}(\lambda_1 - \lambda), \quad 2^{s_1+2}(\lambda_1 - \lambda), \quad \dots, \quad 2^{s_2}(\lambda_1 - \lambda),$$

et les points J_{s_1} , J_{s_1+1} , ..., J_{s_2-1} sont définis par les angles

$$\alpha\lambda_1 \left(1 - \frac{1}{2}\right), \quad \alpha\lambda_1 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right), \quad \dots, \quad \alpha\lambda_2.$$

D'une façon générale, si $n = s_k + m$, avec $0 < m \leq n_{k+1}$, on voit aisément que le point M_n est sur la corde ($J_{s_k-1}J_{s_k+m-1}$) dont les extrémités sont définies par les angles $\alpha\lambda_k$ et $\alpha\left(\lambda_k + \frac{(-1)^k}{2^n}\right)$, et que l'on a

$$\frac{J_{s_k-1}M_n}{J_{s_k-1}J_{s_k+m-1}} = (-1)^k 2^n (\lambda - \lambda_k).$$

Cela étant, en prenant pour unité le rayon du cercle, les coordonnées du point M_n sont :

$$x = \cos \alpha\lambda_k + (-1)^k 2^n (\lambda - \lambda_k) \left\{ \cos \alpha \left[\lambda_k + \frac{(-1)^k}{2^n} \right] - \cos \alpha\lambda_k \right\},$$

$$y = \sin \alpha\lambda_k + (-1)^k 2^n (\lambda - \lambda_k) \left\{ \sin \alpha \left[\lambda_k + \frac{(-1)^k}{2^n} \right] - \sin \alpha\lambda_k \right\},$$

qui peuvent s'écrire

$$x = \cos \alpha\lambda_k + (-1)^{k+1} 2^{n+1} (\lambda - \lambda_k) \sin \alpha \left[\lambda_k + \frac{(-1)^k}{2^{n+1}} \right] \sin \frac{(-1)^k \alpha}{2^{n+1}},$$

$$y = \sin \alpha\lambda_k + (-1)^k 2^{n+1} (\lambda - \lambda_k) \cos \alpha \left[\lambda_k + \frac{(-1)^k}{2^{n+1}} \right] \sin \frac{(-1)^k \alpha}{2^{n+1}}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, le produit $2^{n+1}(\lambda - \lambda_k)$ reste toujours en valeur absolue inférieur à 2, $\sin \frac{(-1)^k \alpha}{2^{n+1}}$ tend

vers 0, et la limite de M_n est le point de coordonnées

$$\cos \alpha \lambda, \quad \sin \alpha \lambda,$$

qui satisfait bien aux conditions de l'énoncé.

Si $\frac{AM}{AB} > \frac{1}{2}$, on considérera le rapport $\frac{BM}{BA} < \frac{1}{2}$ et l'on prendra OB pour axe des x .

2006.

(1905, p. 48.)

Soit m un nombre impair positif quelconque. Formons la suite

$$[\sqrt{m}], [\sqrt{2m}], \dots, [\sqrt{(m-1)m}],$$

en désignant, suivant l'usage, par $[x]$ le nombre entier défini par

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

1° Dans la suite ainsi obtenue il ne peut y avoir plus de deux termes égaux;

2° La même suite, au contraire, contient des couples de termes égaux, et le nombre de ces couples est $\left[\frac{m}{4} \right]$.

EXEMPLE. — Pour $m = 9$, la suite est la suivante :

$$3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8,$$

et elle contient $2 = \left[\frac{9}{4} \right]$ couples de termes égaux.

(R. BRICARD.)

SOLUTION

. Par M. PARROD.

1° S'il y avait trois termes égaux, ils seraient consécutifs; on aurait

$$a^2 \leq hm < (a+1)^2,$$

$$a^2 \leq (h+2)m < (a+1)^2,$$

donc

$$2m < 2a+1,$$

or

$$a < m - 1;$$

c'est donc impossible.

2° Cette suite renferme des termes égaux, car le nombre des termes est supérieur à la différence des extrêmes plus 1

$$m - [\sqrt{m}].$$

Il y a donc au moins $[\sqrt{m}] - 1$ couples de termes égaux. A deux termes égaux correspondent les inégalités

$$\begin{aligned} a^2 &\leq hm < (a+1)^2, \\ a^2 &\leq (h+1)m < (a+1)^2, \end{aligned}$$

donc

$$m < 2a + 1, \quad a > \frac{m-1}{2}.$$

Or

$$\frac{m-1}{2} = \left[\sqrt{\frac{m-1}{4} \times m} \right];$$

par suite pour ces termes

$$h \geq \left[\frac{m}{4} \right].$$

La différence de deux termes consécutifs peut être supérieure à 1; on aurait alors, par exemple,

$$\begin{aligned} a^2 &\leq (hm < (a+1)^2, \\ (a+2)^2 &\leq (h+1)m < (a+3)^2, \end{aligned}$$

donc

$$m \geq 2a + 3, \quad a \leq \frac{m-3}{2}$$

et

$$h < \left[\frac{m}{4} \right].$$

On a ainsi partagé la suite en deux; la différence des extrêmes de la première est $\frac{m-1}{2} - [\sqrt{m}] + 1$, le nombre des termes est $\left[\frac{m}{4} \right]$, la différence est le nombre dont il faut augmenter $[\sqrt{m}] - 1$ pour avoir le nombre exact des couples

(572)

égaux ; on a ainsi

$$\frac{m-1}{2} - \frac{m}{4}$$

ou

$$\left[\frac{m}{2} \right] - \left[\frac{m}{4} \right] = \left[\frac{m}{4} \right].$$

Remarque. — Le théorème est encore exact quand m est pair. Quand m est un multiple de 4, pour $h = \frac{m}{4}$ on a

$$\sqrt{\frac{m}{4} \times m} = \frac{m}{2}$$

et

$$\left[\sqrt{\frac{m+4}{4} \times m} \right] = \frac{m}{2};$$

ces deux termes sont égaux, mais aucun de ceux qui les précèdent ne sont égaux.

2035.

(1906, p. 96.)

Soient ABC, A'B'C' deux triangles. Si les droites AA', BB', CC' rencontrent respectivement les côtés a, b, c du premier triangle en trois points situés sur une même droite, les points (a, a'), (b, b'), (c, c') se joignent aux sommets A', B', C' du second triangle par trois droites concourantes.

(R. B.)

SOLUTION

Par M. G. FONTENÉ.

Le triangle ABC étant pris comme triangle de référence, soient

$$\begin{aligned} ax + a'y + a''z &= 0, & bx + b'y + b''z &= 0, \\ cx + c'y + c''z &= 0 \end{aligned}$$

les équations des côtés du triangle A'B'C'. Si l'on désigne par A, A', A'', B, B', ..., les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix},$$

affectés des signes qui concernent le développement de ce déterminant, on a pour les coordonnées du point A', par exemple,

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{A'} = \frac{z}{A''},$$

de sorte que la droite AA' rencontre le côté BC ou α en un point dont les coordonnées sont O, A', A''; l'hypothèse de l'énoncé se traduit donc par la condition

$$(1) \quad \begin{vmatrix} O & A' & A'' \\ B & O & B'' \\ C & C' & O \end{vmatrix} = 0.$$

Une droite passant en A' a une équation de la forme

$$\beta(bx + b'y + b''z) + \gamma(cx + c'y + c''z) = 0;$$

elle passe au point (α, α') , si l'équation

$$\alpha(ax + a'y + a''z) + \beta(bx + b'y + b''z) + \gamma(cx + c'y + c''z) = 0$$

peut se réduire à $x = 0$, c'est-à-dire si l'on peut avoir

$$\begin{aligned} \alpha'\alpha + b'\beta + c'\gamma &= 0, \\ \alpha''\alpha + b''\beta + c''\gamma &= 0; \end{aligned}$$

il faut donc prendre

$$\frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C},$$

et l'équation de la droite considérée est

$$B(bx + b'y + b''z) + C(cx + c'y + c''z) = 0$$

en écrivant que cette droite et les deux droites analogues sont concourantes, on retombe, comme l'on voit, sur la condition (1).

On démontrerait d'une manière toute semblable le théorème suivant : *Soient ABCD, A'B'C'D' deux tétraèdres. Si les droites AA', BB', CC', DD' rencontrent respectivement les plans α, b, c, d des faces du premier tétraèdre en quatre*

points situés dans un même plan, les droites (a, a') , (b, b') , ... déterminent avec les sommets A', B', C', D' du second tétraèdre quatre plans qui ont un point commun.

Autres solutions de MM. PAINVIN, PARROD, RETALI, SICARD et SONDAT.

NOTE.

Voici une démonstration par la méthode de Grassmann de l'extension à l'espace indiquée par M. Fontené. Une démonstration toute semblable s'appliquerait à la question 2035.

Le point de rencontre de la droite AA' et du plan a ou BCD est donné par le produit régressif

$$AA'.BCD = AA'CD.B + AA'DB.C + AA'BC.D.$$

En écrivant que ce point et les trois points analogues sont dans un même plan, on obtient la condition

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 0 & AA'CD & AA'DB & AA'BC \\ BB'CD & 0 & BB'DA & BB'AC \\ CC'BD & CC'DA & 0 & CC'AB \\ DD'BC & DD'CA & DD'AB & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part la droite (a, a') est donnée par le produit régressif

$$B'C'D'.BCD = B'BCD.C'D' + C'BCD.D'B' + D'BCD.B'C',$$

et le plan passant par cette droite et par le point A' a pour expression

$$\begin{aligned} B'BCD.C'D'A' + C'BCD.D'B'A' + D'BCD.B'C'A' \\ = B'BCD.b' + C'BCD.c' + D'BCD.d'. \end{aligned}$$

En écrivant que ce plan et les trois plans analogues passent par un même point, on a

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 0 & B'BCD & C'BCD & D'BCD \\ A'CDA & 0 & C'CDA & D'CDA \\ A'DAB & B'DAB & 0 & D'DAB \\ A'ABC & B'ABC & C'ABC & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on écrit la relation (1)

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & 0 & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & 0 & \delta'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

la relation (2) s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & -\alpha' & \alpha'' & -\alpha''' \\ -\beta & 0 & -\beta'' & \beta''' \\ \gamma & -\gamma' & 0 & -\gamma''' \\ -\delta & \delta' & -\delta'' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui revient manifestement au même.

R. B.