

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 556-561

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__556_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Trajectoires orthogonales des strophoïdes*

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0,$$

a étant arbitraire. Construire une de ces trajectoires [l'équation d'une trajectoire est $r^2 = C^3 \sin \theta (1 + 2 \cos^2 \theta)$].

II. *Étant donnés deux axes rectangulaires OX, OY, on considère un point A, de masse 1, assujéti à glisser sur OX, et un point B, de masse 8, libre de se mouvoir dans le plan OXY. Les deux points s'attirent avec une force égale à 8AB : à l'instant initial ils sont au repos, A à l'origine, B en un point $x_0 = y_0 = 9$. Mouvement du système : construire la trajectoire en B.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnés trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, sur la parabole*

$$z = 0, \quad x^2 - 2y = 0,$$

on prend un point quelconque M, par lequel on mène MP parallèle à OZ et égale au double de l'aire comprise entre l'arc OM et sa corde : rectifier la courbe lieu des points P. Calculer l'aire cylindrique ω engendrée par les droites MP et comprise entre les arcs OM, OP et la droite MP. En prenant le mètre pour unité de longueur et supposant l'abscisse des points M, P égale à 2, calculer ω à moins de 1^{cm}².

$$ds = \left(1 + \frac{1}{2} x^2\right) dx,$$

$$\omega = \frac{1}{45} + \frac{3x^2 - 2}{90} (1 + x^2)^{\frac{2}{3}},$$

$$\omega_1 = 1^{\text{m}^2}, 2645.$$

(Novembre 1906.)

Grenoble.

COMPOSITION. — 1° Intégrer le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = x - y - t - 2,$$

$$\frac{dy}{dt} = y + t.$$

2° Déterminer une solution particulière telle que, pour $t = 0$, on ait $x = 0$, $y = 0$. Construire pour cette solution particulière la courbe que décrit le point de coordonnées x , y quand t varie.

3° Déterminer : 1° l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x et la droite $x = 1$; 2° l'aire comprise entre la courbe et la droite $x = 1$.

4° Montrer que, par le point $x = 1$, $y = -1$, on ne peut mener qu'une tangente à la courbe.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire limitée par la courbe

$$y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

l'axe des x et la droite $x = t$, lorsque t est compris entre 0 et 1.

Cas particuliers où $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Que deviennent les formules lorsque t tend vers 1?

II. Montrer que l'équation

$$\int_0^x \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}$$

n'a qu'une racine. La calculer par approximations.

(Novembre 1906.)

Lille.

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1. a et b désignant deux longueurs données ($a > b$), et Ox , Oy , Oz étant trois axes rectangulaires, les équations

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

représentent une ellipse située dans le plan xOy : trouver et construire la courbe (Γ) lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes à l'ellipse, former l'équation de (Γ) en coordonnées polaires.

2. Calculer l'aire de la portion de plan située à l'intérieur de (Γ) .

3. La courbe (Γ) est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz , construire la projection sur le plan xOz de l'intersection de ce cylindre avec une sphère de centre O et de rayon a .

4. Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par ce cylindre et la sphère qui viennent d'être définis.

5. a et b variant de telle sorte que la différence $a^2 - b^2$ conserve une valeur constante donnée, (Γ) engendre une famille de courbes; former et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales de ces courbes.

MÉCANIQUE.

I. *Pendule simple dans le vide.*

II. *Un voyageur, qui se trouve dans un wagon en marche, abandonne librement à lui-même, sans vitesse relative, un point matériel pesant en un point situé sur la verticale médiane du wagon, à 2^m au-dessus du plancher. On demande d'étudier le mouvement relatif de ce point pesant, par rapport au wagon, dans les deux cas suivants :*

1° *Le wagon a un mouvement uniformément accéléré; son accélération est de 0^m,50 par seconde, et sa vitesse est de 40^{km} à l'heure, à l'instant même où on lâche le point pesant.*

2° *Le wagon se meut avec une vitesse constante de 30^{km} à l'heure sur un cercle de 80^m de rayon.*

(Novembre 1906.)

Montpellier.

EPREUVE ÉCRITE. — *Quantités imaginaires. Représentation trigonométrique et exponentielle. Formule de Moivre.*

Mettre $\log \text{nép}(x + yi)$ sous la forme $X + iY$, et vérifier que X et Y sont des fonctions de x et y vérifiant l'équation de Laplace

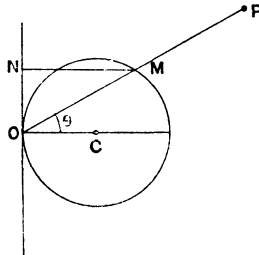
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Partant ensuite du développement de $\log(1 + z)$ en série de Taylor, on y remplacera z par $r(\cos \theta + i \sin \theta)$, et l'on séparera dans les deux membres la partie réelle de la partie purement imaginaire, ce qui donnera deux développements remarquables. Ces développements sont-ils valables pour toutes les valeurs de r et de θ .

On fixera ensuite son attention sur celui de ces développements qui ne contient que des sinus, et l'on montrera que pour $r = 1$ il représente $\frac{\theta}{2}$, et l'on se proposera de retrouver directement ce développement en développant $\frac{\theta}{2}$ en série trigonométrique.

(560)

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère un cercle C et une tangente ON fixes. Par O on mène un rayon vecteur OM et l'on projette M en N sur la tangente fixe. On prolonge



OM de $MP = MN$. Lieu de P .

Lorsque θ varie de 0° à 90° , la courbe (P) enferme au-dessus de l'axe OC une aire que l'on demande d'évaluer.

(Novembre 1906.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. L'équation d'une droite, rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy , est

$$y = tx + t^3,$$

où t désigne un paramètre variable.

Construire l'enveloppe K de cette droite.

Calculer la longueur d'un arc OM de la courbe k , le rayon de courbure au point M .

A désignant le point de la courbe où le coefficient angulaire de la tangente est égal à un, calculer l'aire limitée par l'arc OA et par les tangentes aux extrémités de cet arc.

Supposant ensuite que t désigne le temps, le point de contact de la droite mobile a un certain mouvement sur sa trajectoire K .

Trouver, à un instant quelconque, la vitesse, l'accélération normale de ce mouvement, et calculer l'énergie cinétique du point à l'instant où il passe en A , en supposant la masse du point égale à $\frac{1}{3}$.

II. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = e^{-t} \sin t + 4e^t.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Calculer la quantité φ déterminée par la formule

$$\varphi = 1,0565 L \frac{t}{273} + 9 \times 10^{-7} \left(\frac{t^2}{2} - 503t \right) + 0,0902$$

pour $t = 326$.

2° Calculer φ par la formule approchée

$$\varphi = L \frac{t}{273}$$

pour la même valeur de la variable t .

3° Trouver l'erreur relative commise en substituant la formule approchée à la formule exacte.

NOTE. — Dans les formules ci-dessus, la notation $L a$ indique le logarithme népérien de a .

(Novembre 1906.)