

PARROD

**Agrégation des sciences mathématiques
(concours de 1906). Solution de la
question d'analyse**

*Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 546-553*

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__546_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(CONCOURS DE 1906).**

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE ⁽¹⁾;

PAR M. PARROD.

1° Éliminons y, p, z entre les quatre premières équations, après simplification, il vient

$$x du + dx - q x d\beta = 0$$

(¹) Voir l'énoncé dans le numéro de septembre, p. 408.

ou

$$x(u'_\alpha dx + u'_\beta d\beta) + dx - q x d\beta = 0.$$

Identifions et résolvons les équations

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{u'_\alpha}, & p &= u - \beta u'_\beta, \\ y &= \beta x, & q &= u'_\beta. \\ z &= \alpha + ux, \end{aligned}$$

Lorsque

$$u''_{\alpha^2} = 0, \quad u = \alpha H + H_1,$$

H et H_1 étant des fonctions de β seule; alors x , y et z sont seulement fonctions de β , la surface S se réduit à une courbe.

Cette condition est nécessaire, en effet; il faut que

$$\frac{x'_\alpha}{x'_\beta} = \frac{y'_\alpha}{y'_\beta} = \frac{z'_\alpha}{z'_\beta}$$

ou

$$\frac{x'_\alpha}{x'_\beta} = \frac{\beta x'_\alpha}{\beta x'_\beta + x} = \frac{1 + u'_\alpha x + u x'_\alpha}{u'_\beta x + u x'_\beta};$$

or

$$1 + u'_\alpha x = 0,$$

donc ces égalités n'ont lieu que si

$$x'_\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad u''_{\alpha^2} = 0.$$

L'équation générale des lignes asymptotiques est

$$D dx^2 + 2 D' dx d\beta + D'' d\beta^2 = 0.$$

Le plan tangent ayant pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

on a

$$\begin{aligned} D &= p x''_{\alpha^2} + q y''_{\alpha^2} - z''_{\alpha^2} = + u''_{\alpha^2} x, \\ D' &= p x''_{\alpha\beta} + q y''_{\alpha\beta} - z''_{\alpha\beta} = 0, \\ D'' &= p x''_{\beta^2} + q y''_{\beta^2} - z''_{\beta^2} = - u''_{\beta^2} x. \end{aligned}$$

L'équation demandée est

$$u''_{\alpha} d\alpha^2 - u''_{\beta} d\beta^2 = 0.$$

Le coefficient de $d\alpha d\beta$ est nul, donc les $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ sont conjuguées sur S.

L'équation du plan tangent nous permet de voir que ce plan passe par le point fixe $(0, 0, \alpha)$; ce point est le sommet du cône, le lieu est l'axe des z .

2° Dérivons trois fois le premier membre de l'équation du plan tangent

$$(u - \beta u'_{\beta})X + u'_{\beta}Y - Z + \alpha = 0,$$

on a

$$(u'_{\alpha} - \beta u''_{\alpha\beta})X + u''_{\alpha\beta}Y + 1 = 0,$$

$$(u''_{\alpha^2} - \beta u'''_{\alpha^2\beta})X + u'''_{\alpha^2\beta}Y = 0,$$

$$(u'''_{\alpha^3} - \beta u^{IV}_{\alpha^3\beta})X + u^{IV}_{\alpha^3\beta}Y = 0.$$

Les deux dernières équations doivent être identiques :

$$\frac{u'''_{\alpha^3}}{u''_{\alpha^2}} = \frac{u^{IV}_{\alpha^3\beta}}{u'''_{\alpha^2\beta}}.$$

Intégrons, on a d'abord

$$u = Mu'_{\beta} + \alpha N + P,$$

M, N et P étant des fonctions quelconques de β seule.

Pour achever l'intégration, posons

$$u = vK + \alpha B_1 + B_2,$$

K étant une fonction de β .

L'équation différentielle devient

$$v(K - MK') = v'_{\beta}MK$$

en posant

$$B_1 = MB'_1 + N,$$

$$B_2 = MB'_2 + P,$$

et

$$\log v = \int \frac{K - MK'}{MK} d\beta + \log A,$$

le produit $v \frac{1}{A}$ est une fonction $\frac{B}{K}$ de β seule; donc

$$u = AB + \alpha B_1 + B_2.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante; l'équation du plan tangent devient

$$[AB + \alpha B_1 + B_2 - \beta(AB' + \alpha B'_1 + B'_2)]X \\ + (AB' + \alpha B'_1 + B'_2)Y - Z + \alpha = 0.$$

Ce plan passe le point fixe

$$(B - \beta B')X + B'Y = 0, \\ (B_1 - \beta B'_1)X + B'_1Y + 1 = 0, \\ (B_2 - \beta B'_2)X + B'_2Y - Z = 0.$$

Lorsque

$$u = AB + \alpha B_1 + B_2, \\ u'_\beta = AB' + \alpha B'_1 + B'_2.$$

L'équation différentielle linéaire est

$$(u - \alpha B_1 - B_2)B' - (u'_\beta - \alpha B'_1 - B'_2)B = 0,$$

où

$$u = p + q \frac{y}{x}, \quad \beta = \frac{y}{x}, \quad u'_\beta = q, \quad \alpha = z - px - py$$

la substitution donne une équation de la forme

$$Pp + Qq = R.$$

Les équations d'une caractéristique sont

$$\frac{y}{x} = \beta \quad \text{et} \quad z - px - qy = \alpha,$$

où p et q sont des fonctions de $\frac{y}{x}$ et du paramètre α ;

A étant une fonction quelconque donnée de α .

Les surfaces intégrales sont les surfaces S, et les équations qui définissent le sommet du cône relatif à une ligne $\beta = \text{const.}$ sont indépendantes de α et de A.

3° Les équations de la droite D étant

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= 0 \end{aligned} \quad (c_1 c_2 \neq 0),$$

le système formé par ces deux équations et les trois équations précédentes, définissant le sommet du cône, doivent avoir une solution; donc

$$\begin{aligned} a_1 B' - b_1 (B - \beta B') + c_1 (BB'_1 - B_1 B') &= 0, \\ a_2 B' - b_2 (B - \beta B') + c_2 (BB'_2 - B_2 B') &= 0. \end{aligned}$$

La fonction B étant quelconque, mais donnée,

$$\frac{BB'_1 - B_1 B'}{B^2} = f(\beta).$$

Intégrons

$$B_1 = F_1(\beta) + B \times \text{const.},$$

de même

$$B_2 = F_2(\beta) + B \times \text{const.};$$

donc

$$u = (A + \alpha \times \text{const.} + \text{const.})B + \alpha F_1(\beta) + F_2(\beta).$$

Posons

$$\begin{aligned} B_1 &= h_1 \beta + k_1, \\ B_2 &= h_2 \beta + k_2. \end{aligned}$$

Les deux équations différentielles deviennent

$$\begin{aligned} B(h_1 c_1 - b_1) + B'[\beta(b_1 - h_1 c_1) + a_1 - k_1 c_1] &= 0, \\ B(h_2 c_2 - b_2) + B'[\beta(b_2 - h_2 c_2) + a_2 - k_2 c_2] &= 0. \end{aligned}$$

Ces deux équations sont satisfaites quelle que soit B, si

$$h_1 = \frac{b_1}{c_1}, \quad k_1 = \frac{a_1}{c_1}, \quad h_2 = \frac{b_2}{c_2}, \quad k_2 = \frac{a_2}{c_2}.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est dans ce cas

$$A'' B \, dx^2 - AB'' \, d\beta^2 = 0.$$

Les variables sont séparées

$$\int \sqrt{\frac{A''}{A}} \, dx = \pm \int \sqrt{\frac{B''}{B}} \, d\beta.$$

En rapportant ces surfaces à de nouvelles coordonnées ayant pour axe des z la droite D, le lieu des sommets des cônes relatifs aux lignes $\alpha = \text{const.}$ sera le nouvel axe des z , c'est-à-dire la droite D, et l'autre lieu sera l'ancien axe des z . D'après le théorème de Königs, les plans passant par la droite D et les cônes circonscrits ayant leurs sommets sur cette droite déterminent également deux réseaux de lignes conjuguées; donc les courbes $\alpha = \text{const.}$ sont situées dans des plans passant par la droite D : il est facile de le vérifier en éliminant B et β entre les expressions des coordonnées qui suivent, on a

$$\frac{a_2 x + b_2 y - c_2 z}{a_1 x + b_1 y + c_1} = f(\alpha).$$

Les équations de l'axe des z primitifs dans ce nouveau système d'axes étant

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0,$$

$$a_4 x + b_4 y - c_4 z = 0.$$

Cette réciprocité nous montre que, dans le nouveau système d'axes, les expressions des coordonnées seraient de la même forme que dans l'ancien système après avoir permuté α et β puis remplacé les coefficients $a_1, \dots, c_2$ par $a_3, \dots, c_4$.

On obtiendra les expressions des coordonnées d'un

point d'une surface du deuxième groupe en remplaçant les coefficients $a_1, \dots, c_2$ par $\alpha_3, \dots, c_4$.

Rendons homogènes les coordonnées, on a pour les deux groupes de surfaces

$$\begin{aligned}\rho_1 x &= -1, \\ \rho_1 y &= -\beta, \\ \rho_1 z &= \alpha A'B - AB + \rho_1(h_2 y + k_2 x), \\ \rho_1 t &= A'B - \rho_1(h_1 y + k_1 x); \\ \rho_2 x &= -1, \\ \rho_2 y &= -\beta, \\ \rho_2 z &= \alpha A'B - AB + \rho_2(h_3 y + k_3 x), \\ \rho_2 t &= A'B - \rho_2(h_3 y + k_3 x).\end{aligned}$$

L'un des groupes se déduit de l'autre par la transformation homographique

$$\begin{aligned}x &= X, & y &= Y, \\ z - h_2 y - k_2 x &= Z - h_4 Y - k_4 X, \\ t + h_1 y + k_1 x &= T + h_3 Y + k_3 X.\end{aligned}$$

D'ailleurs, la transformation homographique

$$\begin{aligned}x &= -X, \\ y &= -Y, \\ z - h_2 y - k_2 x &= Z, \\ t + h_1 y + k_1 x &= T\end{aligned}$$

ramène l'équation d'une surface du premier groupe à la forme plus simple

$$\begin{aligned}\rho x &= 1, & x &= \frac{1}{A'B}, \\ \rho y &= \beta, & y &= \frac{\beta}{A'B}, \\ \rho z &= \alpha A'B - AB, & \text{ou} & \\ \rho t &= A'B, & z &= \alpha - \frac{A}{A'}.\end{aligned}$$

z est une fonction de α seule; donc l'équation d'une

surface est de la forme

$$x = f(z) \varphi \left(\frac{y}{x} \right),$$

f et φ étant des fonctions quelconques.