

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 514-520

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__514_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Construire la courbe lieu des points dont les coordonnées rectangulaires ont pour expressions

$$x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \quad y = \frac{(t-2)^2}{t-1}.$$

II. Étant donnée la parabole P, $y^2 = 2px$, former l'équation de la parabole Q obtenue en transportant P parallèlement à elle-même de manière que son sommet vienne en un point M(α , β). Supposons que le point M décrive la parabole

$$y^2 + 2px = 0,$$

les paraboles Q formeront une famille de courbes : trouver leurs trajectoires orthogonales.

III. Un point M, de masse m , assujetti à se mouvoir sur une circonférence de rayon a , est attiré vers un point O de la courbe par une force $m\omega^2 r$, r désignant la distance OM. A l'instant initial, cette distance est $a\sqrt{2}$ et la vitesse, égale à $a\omega\sqrt{2}$, a un sens tel que le mobile se rapproche du point O. On demande le mouvement du point M et la pression qu'il exerce sur la circonférence.

Résultats de la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \sin \theta, \quad N = 2m\omega^2 a (3 \sin^2 \theta - 1).$$

CALCUL. — Étant donnée une sphère de 1^m de rayon, calculer, avec cinq chiffres exacts, la hauteur d'un segment à une base dont le volume est le quart de celui de la sphère. (Juillet 1906.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = y \sqrt{1 - y^2}.$$

2° Montrer que la courbe intégrale qui passe par le point $x = 0, y = 1$ peut être représentée par les équations

$$x = L \tanh \frac{t}{2}, \quad y = \sinh t.$$

Construire cette courbe.

3° Calculer l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x , l'axe des y et la droite $x = a$. Limite de cette aire lorsque a croît indéfiniment.

4° Expression du rayon de courbure en un point de la courbe, en fonction du paramètre t correspondant à ce point.

5° En conclure les valeurs numériques des coordonnées des points d'inflexion de la courbe.

6° Volume du solide limité par la surface qu'engendre la courbe, en tournant autour de Ox .

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Évaluer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2} + 1-x^2}.$$

2° Montrer que l'équation

$$e^{-x} - x = 0$$

n'a qu'une racine. Calculer cette racine à $\frac{1}{100}$ près.

3° Étant donnée la surface représentée par l'équation $z = x^2 + y^2$, on considère le solide compris entre la surface, le plan des xy , le cylindre $y = x^2$ et le plan $y = 1$.
Volume de ce solide. (Juillet 1906.)

Lille.

I. — ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° Étant donnée, dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox , Oy , la courbe (Γ) dont l'équation est

$$x^2y = 2a^3,$$

dans laquelle a désigne une longueur donnée, construire cette courbe et déterminer les coordonnées des points M_1 et M_2 , pieds des normales qui peuvent lui être menées de l'origine.

2° Calculer l'aire limitée par le segment OM_1 , la courbe et l'axe Ox .

$$3^\circ \quad y = mx + p$$

étant l'équation d'une droite quelconque du plan, trouver la relation qui doit exister entre m et p pour que cette droite soit tangente à la courbe (Γ) ; en déduire le lieu des points du plan d'où l'on peut mener à cette courbe deux tangentes rectangulaires et construire ce lieu.

4° x et y désignant les coordonnées d'un point de la courbe donnée, montrer que la sous-normale correspondante est égale à $K \frac{y^2}{x}$, K désignant un nombre constant; plus généralement, trouver toutes les courbes telles que la sous-normale soit égale à $K \frac{y^{n+1}}{x^n}$, n étant un nombre donné, montrer que pour certaines valeurs de n les courbes trouvées sont des ellipses ou des hyperboles dont les axes sont Ox et Oy .

5° Calculer le volume commun au cylindre engendré par la rotation de la droite $M_1 M_2$ autour de Ox et à un prisme dont les arêtes sont perpendiculaires au plan xOy et dont la base est le triangle $OM_1 M_2$.

II. — MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Travail des forces appliquées à un solide indéformable.*

2° *Un cube homogène ABCDD₁A₁B₁C₁, pesant 2^{kg}, reçoit un mouvement hélicoïdal uniforme autour de l'axe Oz d'un trièdre trirectangle fixe Oxyz, son arête AA₁ glissant sur la verticale ascendante Oz. Aux sommets B et D de la base inférieure, voisins de A, sont appliquées deux forces constantes de 4^{kg}, constamment parallèles l'une à Ox l'autre à Oy. Au sommet C de la même face est attaché un fil élastique tendu relié à O, exerçant en C une traction proportionnelle à son allongement et évaluée à 20^g par centimètre d'allongement. Enfin le cube est soumis à un couple résistant d'axe Oz, valant 0^{kgm},1. Calculer en kilogrammètres le travail des forces énumérées pour un déplacement d'un pas.*

L'arête du cube est de 0^m,10. Initialement OA = 0^m,10; AB est parallèle à Ox; la tension du fil est nulle. La vitesse de rotation par seconde est 2π dans le sens direct autour de Oz, et celle de translation de 0^m,10 dans le sens Oz.

(Juillet 1906.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère une surface sphérique homogène qui attire un point M de masse 1 proportionnellement à l'inverse du carré de la distance. En raison de l'homogénéité de la surface, la fonction des forces*

$$V(x, y, z)$$

au point M ne dépend que de la distance ρ du point M au centre de la sphère, que l'on prendra pour origine des coordonnées.

On aura donc

$$(1) \quad V(x, y, z) = F(\rho).$$

1° *Partant de l'égalité (1), on exprimera les dérivées*

partielles $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ en fonction de x, y, z . $F, \frac{\partial F}{\partial \rho}, \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}$.

2° Montrer que l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

à laquelle on sait que V satisfait, se réduit ici à une équation différentielle linéaire entre F et ρ . Donner l'intégrale générale de cette équation.

3° Montrer que, si l'on connaît la valeur de V , d'une part au centre de la sphère, d'autre part à l'infini, on pourra déterminer les constantes arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale, et obtenir la valeur de V pour un point quelconque situé, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de la sphère.

4° Achéver le calcul en déterminant la valeur de V au centre de la sphère et à l'infini, à l'aide d'une intégrale double étendue à la surface de la sphère (suivant la définition de la fonction des forces).

II. Quelle est la limite de

$$\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{\frac{1}{\sin(x^{-2})} + x}$$

quand x tend vers l'infini par valeurs positives.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère une ellipse et une tangente fixe.

Parallèlement à la tangente fixe TT' on mène dans l'ellipse une corde AB ; on projette les points A et B sur TT' , ce qui forme un rectangle.

Comment faut-il choisir la distance des parallèles AB et TT' pour que ce rectangle ait une aire maximum.

(Juillet 1906.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Déterminer les courbes planes dans lesquelles l'angle α que forme la tangente avec Ox est

donné en fonction de l'abscisse par la formule

$$\sin \alpha = \frac{2ax}{a^2 + x^2}.$$

1° Montrer que ces courbes peuvent se représenter par l'une ou l'autre des équations

$$(1) \quad y = C \pm aL\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$(2) \quad y = C \pm aL\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

2° Étudier les deux courbes

$$(1') \quad y = aL\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$(2') \quad y = aL\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right),$$

et faire voir que toutes les autres courbes considérées (1) et (2) s'en déduisent par translation ou par symétrie.

(On déterminera la forme de la courbe, le rayon de courbure en fonction de l'abscisse, les asymptotes et les points d'inflexion s'il en existe.)

3° Trouver les trajectoires orthogonales des courbes (1) et (2).

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer les intégrales

$$J_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx}{1 - \cos \alpha \sin x},$$

$$J_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dx(1 + \cos x)}{(1 - \cos \alpha \sin x)^2}.$$

(Juillet 1906.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy . En un point M quelconque de la courbe E on mène la tangente, qui coupe l'axe des y en P , et l'on élève PA perpendiculaire sur PM .

1° Calculer les coordonnées du point M_1 où la droite PA touche son enveloppe.

2° Déterminer la courbe E de façon que le segment MM_1 ait une longueur constante $2a$. Quelle courbe décrit alors le point M_1 ?

3° Déterminer la courbe E de façon que la droite MM_1 passe constamment par l'origine. Quelles sont les trajectoires orthogonales de la famille de courbes ainsi trouvées?

II. Un point matériel M non pesant, de masse égale à l'unité, est attiré par un point fixe O proportionnellement à sa distance. Ce point est mobile sur une droite fixe D avec un frottement de coefficient f . Le point M est primitivement en un point A de la droite, sans vitesse initiale. On désigne par ω la projection du point fixe O sur la droite fixe D, et l'on pose $\omega A = a$, $\omega O = h$.

1° Le point M se mettra-t-il en mouvement?

2° S'il y a mouvement, étudier ce mouvement, et déterminer le point de la droite où la vitesse du mobile s'annulera pour la première fois.

3° Que se passera-t-il après cet instant, et, en supposant que l'on ait $\frac{a}{h} = \frac{1}{2}$ et $f = \frac{1}{9}$, au bout de combien de temps le mobile s'arrêtera-t-il définitivement?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

par la méthode de Simpson, en divisant le champ d'intégration en six parties égales (on donne $\log e = 0,43429$).

(Juillet 1906.)